Листочек 1. Лемма Холла.

1. Лист бумаги карандашным рисунком разбит на 100 областей одинаковой площади. С обратной стороны листа другим карандашным рисунком лист также разбит на 100 областей одинаковой площади. Докажите, что лист можно проткнуть в сотне мест иголкой так, что каждая из 200 нарисованных фигур будет иметь дырку внутри себя.

2. Пусть нужно переженить мальчиков и девочек, про которых известно, что каждому мальчику нравятся не менее половины девочек, а каждой девочке нравятся не менее половины мальчиков. Мальчиков и девочек поровну, симпатии взаимны. Докажите, что сватовство (в котором задействованы все) удастся.

3. Докажите, что рёбра двудольного графа, степень каждой вершины которого равна k, можно правильно раскрасить в k цветов так, чтобы из каждой вершины выходили рёбра всех цветов.

4. Когда-то на физтехе шутили, что в МФТИ существуют три пола: мужской, кафельный и Пол Саймон (котик-персонаж старого учебника английского). Вообразим гипотетически, что в некой абстрактной вселенной живут по n особей каждого из трёх полов. Известно, что каждая из особей чувствует симпатию не менее, чем к $\frac{3n}{4}$ особям каждого из двух других полов. Симпатия всегда взаимна. Докажите, что можно разбить население абстрактной вселенной на тройки особей различных полов, чтобы в каждой тройке все нравились всем.

5. Колода из $m \times n$ карт содержит карты m различных достоинств и n различных мастей (по одной карте каждой масти и достоинства). Раскладывается следующий пасьянс: карты в случайном порядке выкладывают в виде прямоугольника из n горизонтальных рядов и m вертикальных рядов. Пасьянс сошёлся, если можно найти m карт различного достоинства, по одной из каждого вертикального ряда. Докажите, что этот пасьянс заведомо удачный.

6. Рассматривается прямоугольник $m \times n, m < n$, заполненный числами от 1 до n так, что ни в какой строке числа не повторяются и ни в каком столбце числа не повторяются. Докажите, что его можно дополнить до квадрата $n \times n$, заполненного числами от 1 до n с тем же ограничением.

7. В компании юношей и девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет составить себе гарем из m знакомых девушек. Докажите, что они могут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km.

8. Пусть дано натуральное число $l \geqslant 2$ и натуральные числа $k < n$. Пусть в графе G степень каждой вершины (количество исходящих рёбер) находится в диапазоне $[n, ln]$. Докажите, что можно удалить часть рёбер из графа так, чтобы все степени вершин попали в диапазон $[k, lk]$.

9. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из $N > 100$ цифр. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача – отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). Докажите, что фокусник с помощником могут заранее договориться, чтобы фокус гарантированно удался. (Требуется доказать существование алгоритма действий фокусника и помощника, если считать, что их умственные способности велики.)

10. На прямой даны 50 отрезков. Докажите, что если среди них нельзя найти 8 отрезков, каждые два из которых имеют общую точку, то среди данных 50 отрезков можно найти 8 отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.

11. Дано множество из $\binom{2k-4}{k-2} + 1$ различных действительных чисел. Докажите, что из этого множества можно выбрать монотонную последовательность $(x_i)_{i=1}^k$ такую, что $|x_{i+1} - x_1| \geqslant 2|x_i - x_1|$ для всех $i = 2, \ldots, k-1$.

12. Докажите, что хроматическое число неориентированного графа G (наименьшее количество цветов покраски вершин, при которой соседние вершины покрашены в разные цвета) равно максимальному числу k такому, что для любого ориентирования рёбер G найдётся простой ориентированный путь из k вершин.

13. Над частично упорядоченным множеством следующим образом строится граф: вершины – это элементы множества, и два элемента соединяются ребром, если они сравнимы.

    (i) Докажите, что построенный граф – совершенный.

    (ii) Докажите, что дополнение к построенному графу – совершенный граф.

    По определению, граф называется *совершенным*, если в любом его подграфе хроматическое число (наименьшее количество цветов покраски вершин, при которой соседние вершины покрашены в разные цвета) равно размеру наибольшей клики (полного подграфа).

14. Пусть матрица $n \times n$ заполнена неотрицательными числами, причём сумма в каждой строке равна 1 и сумма в каждом столбце равна 1. Число α_n определяется следующим образом: если $n = 2k$, то $\alpha_n = \frac{1}{k^2+k}$, а если $n = 2k-1$, то $\alpha_n = \frac{1}{k^2}$. Докажите, что можно выбрать n клеток в матрице (по одной из каждой строки и каждого столбца) так, что во всех этих клетках будут стоять числа $\geqslant \alpha_k$. Докажите также, что значение α_n неулучшаемо.

15. Есть юноши и девушки, некоторые взаимно знакомы. Пусть известно, что для любого k и любого подмножества из k юношей выполняется следующее условие. Если k_1 – количество девушек, каждая из которых знакома хотя бы с одним юношей из числа выбранных, а k_2 – количество девушек, каждая из которых знакома хотя бы с двумя юношами из числа выбранных, то $k_1 + k_2 \leqslant 2k$. Докажите, что тогда можно каждому юное назначить жену и любовницу (жена и любовница должны быть различны) из числа знакомых девушек, так что любая девушка будет являться женой не более чем для одного юноши и любовницей не более чем для одного юноши.

16. Пусть $C \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутый выпуклый конус. Докажите, что $(C^\circ)^\circ = C$.

17. Пусть дана матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Докажите, что ровно одна из следующих двух систем имеет решение:

    - $Ax = 0$, $x > 0$;
    - $0 \neq A^T y \geqslant 0$.

18. Дана симметричная положительно определённая матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, причём $a_{ij} \leqslant 0$ при $i \neq j$. Докажите, что существует $v = (v_1 \dots v_n)^\top > 0$, такой что $Av > 0$.