

---

## Листочек 2. Поперечник Урысона

---

Напомню, что  $d$ -мерный поперечник Урысона компактного метрического пространства  $X$  может быть определён одним из следующих эквивалентных способов.

$$UW_d(X) = \inf_{\substack{\bigcup U_i = X \\ \text{mult.}\{U_i\} \leq d+1}} \sup_i \text{diam}(U_i),$$

где инфимум берётся по открытым покрытиям кратности не более  $d + 1$ .

$$UW_d(X) = \inf_{\substack{p: X \rightarrow Z \\ \dim Z \leq d}} \sup_{z \in Z} \text{diam}(p^{-1}(z)),$$

где инфимум берётся по всем непрерывным отображениям  $p$  в метризуемые пространства размерности не более  $d$ .

Обозначения в задачах:

- $B^n$  обозначает шар единичного радиуса в  $\mathbb{R}^n$ ;
- $S^n$  обозначает сферу единичного радиуса в  $\mathbb{R}^{n+1}$ ;
- $\square^n$  обозначает куб с единичным ребром в  $\mathbb{R}^n$ ;
- $\Delta^n$  обозначает правильный  $n$ -мерный симплекс с единичным ребром в евклидовом пространстве.

21. Пусть  $u$  непрерывного отображения  $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  образ имеет размерность меньше, чем  $n$ . Докажите, что  $f$  сдвигает какую-то точку на расстояние не меньше 1.
22. Пусть дано непрерывное отображение  $f : B^n \rightarrow Z$  в метризуемое пространство размерности меньше, чем  $n$ . Докажите, что прообраз какой-то точки нельзя накрыть шаром радиуса меньше 1.
23. Вычислите  $UW_{n-1}(B^n)$ .
24. Используя лемму Кнастера–Куратовского–Мазуркевича, покажите, что  $UW_{n-1}(\Delta^n) = 1/n$ .

### Исследовательские задачи

25. Чему равно  $UW_{n-2}(B^n)$ ?
26. Чему равно  $UW_{n-1}(S^n)$ ?
27. Лемма Лебега о покрытиях влечёт, что  $UW_{n-1}(\square^n) = 1$ . Правда ли, что  $UW_d(\square^n) = \sqrt{n-d}$ ?
28. Чему равны поперечники  $UW_d(\Delta^n)$ ?