(Выпуклый) **Многогранник** в $\mathbb{R}^n$ — ограниченное множество с непустой внутренн. образованное пересечением конечного числа полупространств.

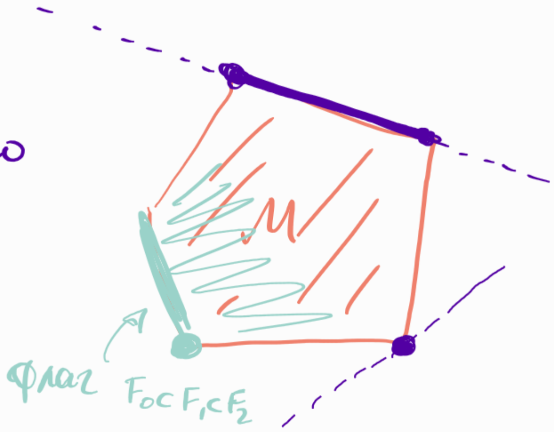
Грань многогранника — пересечение многогранника с опорной гиперплоскостью

Размерность грани = размерность аффинной оболочки

Флагом многогранника называется вложенная цепочка граней

$$F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_{n-1} \subset F_n$$

F_i — грань размерн. i



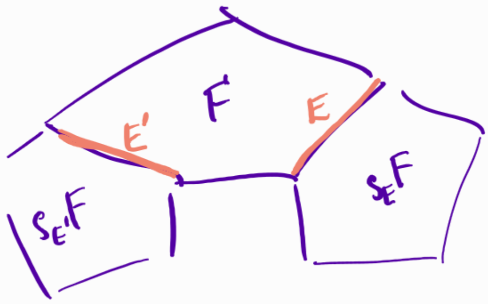
Определение Правильным называется многогранник M, группа симметрий которого действует транзитивно на флагах

($\forall$ флагов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ $\exists\, g \in \mathrm{Sym}\, M$ $\; g \cdot \mathcal{F} = \mathcal{F}'$)

Флаги $\sim$ симплексы барицентрического подразделения

Теорема Пусть M — правильный n-мерный многогранник. Тогда $\mathrm{Sym}\, M$ порождается n отражениями

Пусть G порождена $\mathrm{Sym}\, F$ ($\subset \mathrm{Sym}\, M$) и s_E $\leftarrow$ отражение в зеркале $\langle E \cup \{\text{центр } M\} \rangle$



Покажем, что $G = \mathrm{Sym}\, M$

(по индукции, $\mathrm{Sym}\, F$ порожд. $(n-1)$ отраж.)

1) G содержит $s_{E'}$ $\forall$ $(n-2)$-грани $E' \subset F$

$$s_{E'} = g \circ s_E \circ g^{-1}$$

где $g \in \mathrm{Sym}\, F$, $g(E) = E'$

$$(s_{E'}F, E') \leftarrow\!\shortmid (s_E F, E) \leftarrow\!\shortmid (F, E) \leftarrow\!\shortmid (F, E')$$

2) G содержит $\mathrm{Sym}\, s_E F$: любая симметрия $s_E F$ представима как $s_E \circ g \circ s_E$, $g \in \mathrm{Sym}\, F$

3) G содержит Sym (любая гипергрань) и $S_{[\text{любая } (n-2)\text{-грань}]}$

4) G содержит $\mathrm{Sym}\,\mathcal{M}$

$\forall g \in \mathrm{Sym}\,\mathcal{M}$ смотрим на $g(F)$

строим последовательность отражений в $(n-2)$-гранях

$h = S_{E_1} \circ S_{E_2} \circ \ldots \circ S_{E_k}$

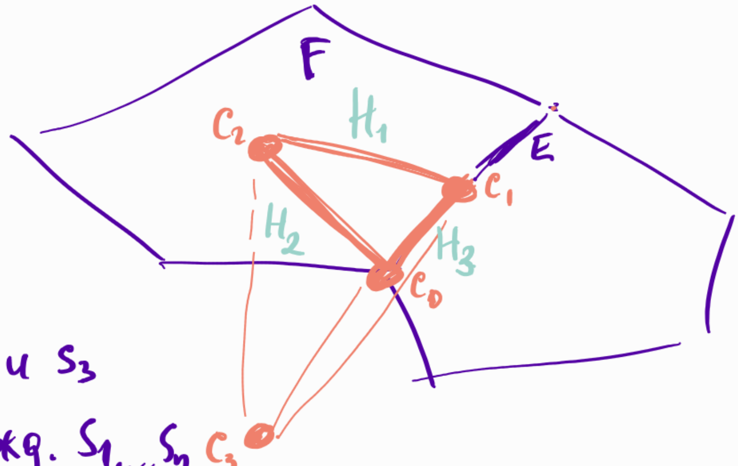
$h(F) = g(F)$

Тогда $h^{-1} \circ g \in \mathrm{Sym}\,F$ $\square$

Флаг $F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n$

центры $c_0, c_1, \ldots, c_n$ ($c_i \in F_i$)

H_i — гиперплоскость, проходящая через все c_j, кроме c_{i-1}, $1 \le i \le n$



s_i — отражение в зеркале H_i

H_i проходит через F_j, $j \le i-2$

H_i перпендикулярна F_l, $l \ge i$

$\mathrm{Sym}\,\mathcal{M}$ порождается $\mathrm{Sym}\,F$ и s_3

по индукции, $\mathrm{Sym}\,\mathcal{M}$ порожд. $s_1, \ldots, s_n$

Символ Шлефли $(p_1, \ldots, p_{n-1})$

p_k — число k-мерных граней между $F_{k-2} \subset \ldots \subset F_{k+1}$

= число $(k-1)$-мерных граней между $F_{k-2} \subset \ldots \subset F_{k+1}$

$(3,3)$	тетраэдр
$(3,4)$	октаэдр
$(3,5)$	икосаэдр
$(4,3)$	куб
$(5,3)$	додекаэдр

Теорема $\mathcal{M}$ — правильный n-мерный многогранник

$$\mathrm{Sym}\,\mathcal{M} = \left\langle s_1, \ldots, s_n \,\middle|\, \begin{array}{l} s_i s_j = s_j s_i \text{ при } |j-i|>1 \\ (s_i s_{i+1})^{p_i} = id \end{array} \right\rangle$$

1) $|i-j|>1$, возьмём $i<k<j$, тогда

$H_i \perp F_{k-1} \subset H_j \Rightarrow (s_i s_j)^2 = id$

2) $s_i s_{i+1}$ — поворот вокруг F_{i-2} на $\frac{2\pi}{m}$, где m — кол-во i-граней (или $(i-1)$-граней) сходящихся в F_{i-2} внутри F_{i+1}

3) Других соотношений нет, потому что конус с образующими $c_0 - c_n, c_1 - c_n, \ldots, c_{n-1} - c_n$ — фундаментальный конус группы отражений в зеркалах H_i

$\circ \overset{p_1}{—} \circ \overset{p_2}{—} \circ — \dots — \circ \overset{p_{n-1}}{—} \circ$ Схема Кокстера группы Sym M

A_n $\circ — \circ — \dots — \circ — \circ$ (симметрическая группа S_{n+1}) симплекс

B_n $\circ — \circ — \dots — \circ \overset{4}{—} \circ$ $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes S_n)$ куб, кросполитоп

F_4 $\circ — \circ \overset{4}{—} \circ — \circ$ 24-ячейник

$G_2^{(m)}$ $\circ \overset{m}{—} \circ$ (диэдральная группа) многоугольник

H_3 $\circ — \circ \overset{5}{—} \circ$ $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times A_5)$ икосаэдр, додекаэдр

H_4 $\circ — \circ — \circ \overset{5}{—} \circ$ 120-, 600-ячейник

n	Граф Кокстера	Символ Шлефли	f-вектор	Многогранник
1	$\bullet$	$\varnothing$	(2)	отрезок
2	$\bullet \overset{m}{—} \bullet$	(m)	(m, m)	m-угольник
3	$\bullet — \bullet — \bullet$	(3, 3)	(4, 6, 4)	тетраэдр
	$\bullet \overset{4}{—} \bullet — \bullet$	(4, 3)	(8, 12, 6)	куб
	$\bullet — \bullet \overset{4}{—} \bullet$	(3, 4)	(6, 12, 8)	октаэдр
	$\bullet \overset{5}{—} \bullet — \bullet$	(5, 3)	(20, 30, 12)	додекаэдр
	$\bullet — \bullet \overset{5}{—} \bullet$	(3, 5)	(12, 30, 20)	икосаэдр
4	$\bullet — \bullet — \bullet — \bullet$	(3, 3, 3)	(5, 10, 10, 5)	симплекс
	$\bullet \overset{4}{—} \bullet — \bullet — \bullet$	(4, 3, 3)	(16, 32, 24, 8)	гиперкуб
	$\bullet — \bullet — \bullet \overset{4}{—} \bullet$	(3, 3, 4)	(8, 24, 32, 16)	гипероктаэдр
	$\bullet — \bullet \overset{4}{—} \bullet — \bullet$	(3, 4, 3)	(24, 96, 96, 24)	24-гранник
	$\bullet \overset{5}{—} \bullet — \bullet — \bullet$	(5, 3, 3)	(600, 1200, 720, 120)	120-гранник
	$\bullet — \bullet — \bullet \overset{5}{—} \bullet$	(3, 5, 3)	(120, 720, 1200, 600)	600-гранник
$n \geqslant 5$	$\bullet — \bullet — \cdots — \bullet$	(3, …, 3)	$(\dots, C_{n+1}^{i+1}, \dots)_{0 \leqslant i < n}$	симплекс
	$\bullet \overset{4}{—} \bullet — \cdots — \bullet$	(4, 3, …, 3)	$(\dots, 2^{n-i} C_n^i, \dots)_{0 \leqslant i < n}$	куб
	$\bullet — \cdots — \bullet \overset{4}{—} \bullet$	(3, …, 3, 4)	$(\dots, 2^{i+1} C_n^{i+1}, \dots)_{0 \leqslant i < n}$	кокуб