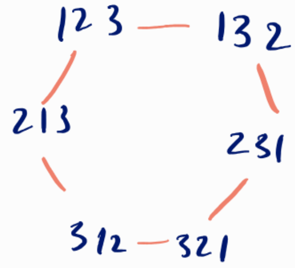
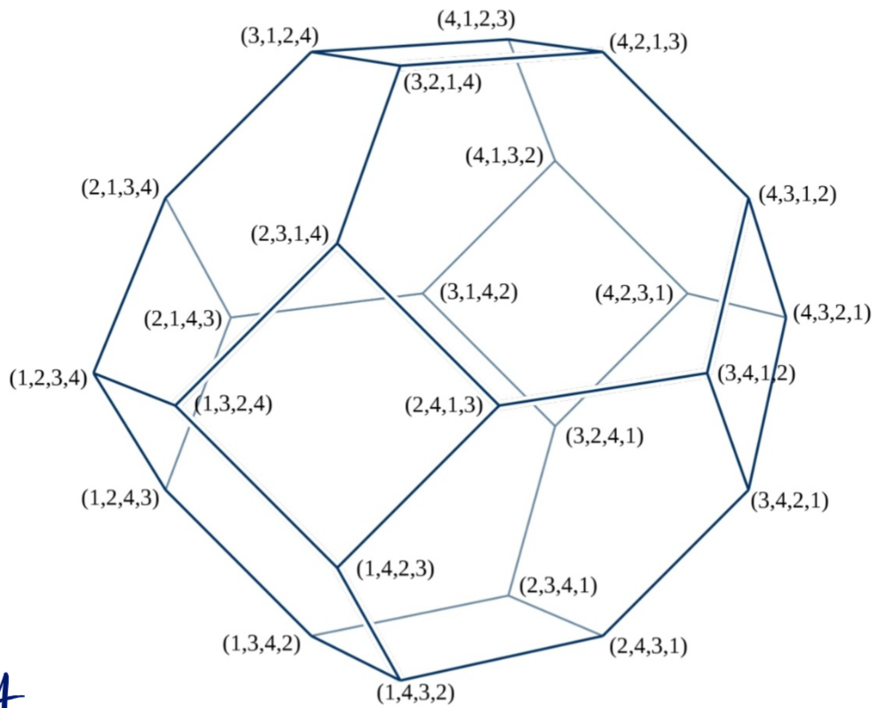
"Конфигурации" — перестановки $\in S_n$

"Флипы" — простые транспозиции (обмен i и $i+1$)

"Флиповые соотношения" — Кокстеровские соотношения

"Соотношения между соотношениями" или "сизигии"





Пермутоэдр $P_{n-1} =$

$= \operatorname{conv}\{(\sigma(0),\dots,\sigma(n-1)) \in \mathbb{R}^n, \sigma \in S_n\}$

$\sigma: \{0,1,\dots,n-1\} \xrightarrow[\text{биекция}]{} \{0,1,\dots,n-1\}$

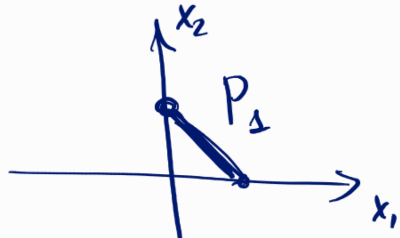
$P_{n-1} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i = \frac{n(n-1)}{2}\}$

Рассмотрим группу отражений A_{n-1} (действующую в $\mathbb{R}^n$ отражениями в плоскостях $\{x_i = x_j\}$)

Рассмотрим орбиту точки $(0,1,\dots,n-1)$, она лежит в камере Вейля $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n$

Многогранником Ньютона многочлена $\sum_{a\in\mathbb{Z}^n} c_a x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$ называется $\operatorname{conv}\{a \in \mathbb{Z}^n, c_a \neq 0\}$

$Newt(f\cdot g) = Newt(f) + Newt(g)$



$Newt(x_1 - x_2) = P_1$

$$P_{n-1} = Newt \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & & x_n^{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= Newt \prod (x_i - x_j) = \sum_{i<j} Newt(x_i - x_j) = \sum_{i<j} [e_i, e_j]$$

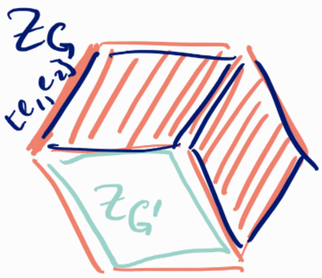
$(e_1,\dots,e_n)$ — ОНБ в $\mathbb{R}^n$

Теорема $vol_{n-1} P_{n-1} = n^{n-3/2}$

Набросок д-ва ("Геометрическая матричная теорема Кирхгофа")

$G = (V, E)$ $\quad V = \{1, \ldots, n\}$

<u>Графический зонотоп</u> $\quad Z_G = \sum\limits_{ij \in E(G)} [e_i, e_j] \qquad (Z_{K_n} = P_{n-1})$



$G =$ 

ост. деревья:

можно разрезать на параллелепипеды вида $\sum\limits_{k=1}^{n-1} [e_{i_k}, e_{j_k}]$

i_k, j_k — рёбра

$[e_{i_k}, e_{j_k}]$ не лежат в одной гиперплоск.

$\Longleftrightarrow$ эти ребра образуют остовное дерево в G

$\mathrm{Vol}_{n-1} Z_G = \sum \mathrm{Vol}$ параллелепипедов

$$\mathrm{Vol}_{n-1}\left([e_1, e_2] + [e_1, e_3] + \ldots + [e_1, e_n]\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{n}} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{n}} \det \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \cdots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} = \sqrt{n}$$

$\mathrm{Vol}_{n-1} Z_G = \sqrt{n}\,\#$ остовных деревьев в G $= \sqrt{n} \cdot n^{n-2} = n^{n-3/2}$

Если $G = K_n$, $\#$ ост. деревьев в G (по матр. т-ме Кирхгофа)

$\Downarrow$ любой главный минор $A = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & -1 & \cdots \\ -1 & n-1 & -1 & 1 & \cdots \\ -1 & -1 & n-1 & -1 & \cdots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$

$A = nI - J \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

x — собств. вектор, $\perp \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, тогда $Ax = nx - Jx = nx$

Собств. числа A: $\quad 0, n, n, \ldots, n$

гл. минор $A = n^{n-2}$

Более общо, для набора чисел $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$,

$$P^{\lambda}_{n-1} = \mathrm{conv}\left\{ (\lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(n)}),\ \sigma \in S_n \right\}, \quad \sigma : \{1, \ldots, n\} \circlearrowleft$$

$\mathcal{M}_\lambda(\mathbb{C})$ — эрмитовы $n\times n$ - матрицы со спектром (набор собств. чисел) $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$

$\mu : \mathcal{M}_\lambda(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^n$ взятие диагонали

$$(a_{ij})_{i,j=1}^n \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>Теорема</u> $\mu(\mathcal{M}_\lambda(\mathbb{C})) = P^\lambda_{n-1}$

$\left(\begin{array}{ll} \mu(\ldots) \subset P^\lambda & \text{Schur 1923} \\ \mu(\ldots) \supset P^\lambda & \text{Horn 1954} \end{array} \right)$

D-во (части Шура) A - эрмитова со спектром λ

$A = U \Lambda U^+$

U - унитарная
U^+ - эрмитово сопряжение U $(UU^+ = I)$
$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}$

$$a_{ii} = \sum_k \sum_j u_{ik} \underbrace{\lambda_{kj}}_{\begin{cases} \lambda_k, & \text{если } k=j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}} \overline{u}_{ij} = \sum_j \lambda_j |u_{ij}|^2$$

$$\mu(A) = \underbrace{\begin{pmatrix} |u_{11}|^2 & |u_{12}|^2 & \cdots \\ |u_{21}|^2 & |u_{22}|^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}}_{\text{дважды стохастическая}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{выпуклая} \\ \text{комбинация} \\ \text{перестановочных} \\ \text{матриц} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Birkhoff – von Neumann

перест. матрица $(p_{ij})_{i,j=1}^n$

$\sigma \in S_n$ $\quad p_{ij} = \begin{cases} 1, & j = \sigma(i) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$