$S_n = A_{n-1}$ группа отражений действующая на $V \simeq \mathbb{R}^{n-1}$

Элементы S_n (перестановки) $\xleftrightarrow{1-1}$ камеры Вейля

$$\left(\begin{array}{lcl} \text{тожд. перест.} & \longleftrightarrow & \text{фунд. камера } C_0 \\ \text{перест. } \sigma & \longleftrightarrow & \sigma C_0 \end{array}\right)$$

$ht(\sigma)$ = кол-во инверсий, т.е. пар $i<j$ таких что $\sigma_i > \sigma_j$

$p \in \operatorname{int} C_0 \xrightarrow{\text{путь}} \sigma \cdot p \in \operatorname{int} \sigma C_0$

этот путь пересекает все зеркала, отделяющие C_0 от σC_0 и можно выбрать путь, пересекающий каждое такое зеркало однажды

Путь в "общем положении", т.е. не проходит через пересеч. зеркал.

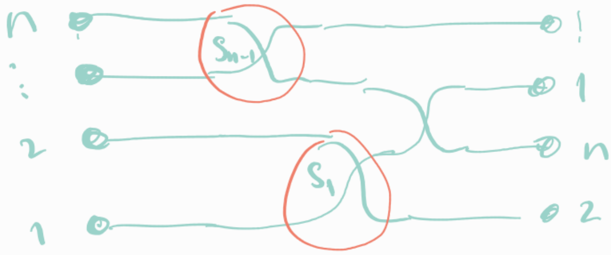
Путь $\longleftrightarrow$ разложение $\sigma = s_{i_1} \cdot s_{i_2} \cdot \ldots \cdot s_{i_k}$

$k \geqslant ht\,\sigma$

Пути с наим. числом пересеч. зеркал $\longleftrightarrow$ кратчайшие разлож. $\sigma = s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_{ht(\sigma)}}$

Wiring diagram

Проводные диаграммы



Bruhat order

Порядок Брюа — Транзитивное замыкание $\gtrdot$

$w' \gtrdot w$ если $w' = s_i w$

$ht(w') = ht(w) + 1$

$w_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ \ldots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $ht(w_0) = \frac{n(n-1)}{2}$

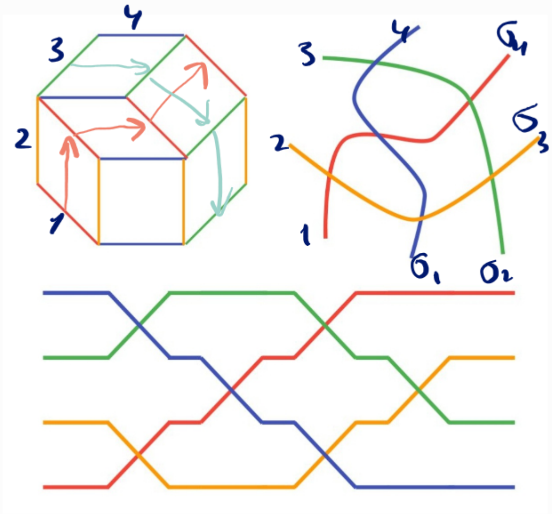
Проводные диаграммы будем считать одинаковыми, если они отличаются перестановкой соседних коммутирующих транспозиций

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Wiring} \\ \text{diagrams (для } w_0)\end{array}\right\} = \frac{\text{Кратч. разложения } w_0 = s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_{\frac{n(n-1)}{2}}}}{\text{можно менять местами } s_{i_j} \text{ и } s_{i_{j+1}} \text{ если они коммутируют}}$$

$\parallel$

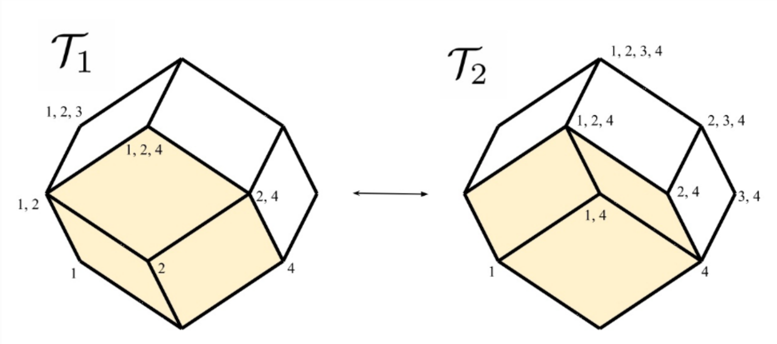
$B_{n,2}$

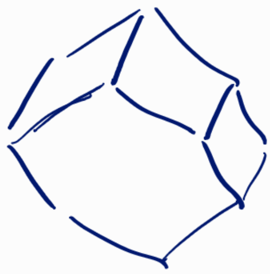
$\dots s_{i+1} s_i s_{i+1} \dots$ $\qquad$ $\dots s_i s_{i+1} s_i \dots$



Замощения симм. $2n$-угольника параллелограммами $\longleftrightarrow$ Проводные диаграммы w_0

Флипы замощений $\longleftrightarrow$ Флипы диаграмм





non-fine tiling

Зонотоп = аффинная проекция куба

$$p: [0,1]^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$(0,\dots,0) \longmapsto 0$$
$$(0,\dots,\underset{i}{1},\dots,0) \longmapsto v_i \in \mathbb{R}^d \qquad V=\{v_1,\dots,v_n\}\subset\mathbb{R}^d$$

i-я позиция

$$[0,1]^n \longmapsto Z_V = \left\{x\in\mathbb{R}^d \;\middle|\; x=\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i,\ 0\le\alpha_i\le 1\right\}$$
$$= \sum_{i=1}^n [0,v_i]$$

Замощение зонотопа: (Zonotopal tiling)

k-мерная грань куба $[0,1]^n$

$\longleftrightarrow$
$x_i = 0 \quad i\in X^-$
$x_i = 1 \quad i\in X^+$
$x_i \in [0,1] \quad i\in X^0$

$$[n] = X^+ \sqcup X^- \sqcup X^0$$
$$|X^0| = k$$

$$X = (X^+, X^-, X^0) \longmapsto \tau_X = \sum_{i\in X^+} v_i + \sum_{j\in X^0} [0,v_j]$$ тайл

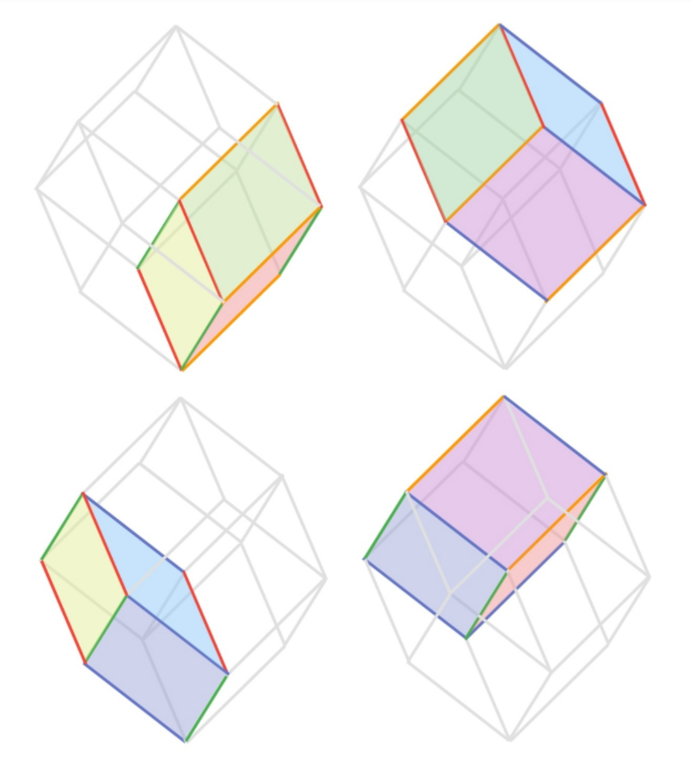
Замощение = Набор тайлов τ_X, $X\in T$

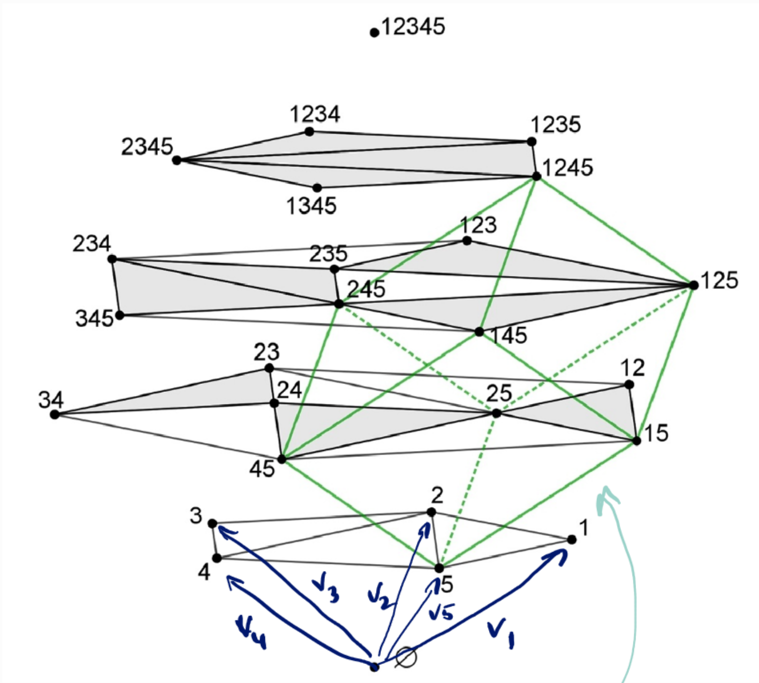
1) $Z_V = \bigcup_{x\in T} \tau_x$

2) $\tau_x \cap \tau_y \neq \emptyset$, $x, y \in T$ $\Rightarrow \exists z \in T:\ \tau_z = \tau_x \cap \tau_y$ общая грань тайлов τ_x, τ_y

3) Замощение параллелепедами (Fine tiling) $\longleftrightarrow |X^0| \le d$

Замощение = d-мерный подкомплекс Q куба $[0,1]^n$ такой, что $p|_Q : Q \to Z_V$ гомеоморфизм





τ_x

$X^+ = \{5\}$

$X^0 = \{1,2,4\}$

$X^- = \{3\}$

Флипы в замощениях зонотопов.

Предп. $\{v_1, \dots, v_n\}$ в общем полож.: любые d лин. незав.

Наим. лин. зависимость $\sum \alpha_i v_i = 0$ $d+1$ ненулевых коэффициентов

$\alpha_i > 0$ $i \in C^+$

$\alpha_i < 0$ $i \in C^-$

$|C^+ \sqcup C^-| = d+1$

Знаковое подмнож. $\tilde{X} = (\tilde{X}^-, \tilde{X}^+, \tilde{X}^0)$, $|\tilde{X}^0| = d+1$

$\tilde{X}^0 = C^+ \sqcup C^-$

Лемма. В любом замощении T для любого $X^0 \subset [n]$, $|X^0| = d$, существует тайл τ_X "направления" X^0

Рассмотрим знаковые подмнож. $\underline{X} = (\underline{X}^+, \underline{X}^-, \underline{X}^0)$ такие, что

$\overline{X} = (\overline{X}^+, \overline{X}^-, \overline{X}^0)$

$\bar{X}^- = \tilde{X}^-$

$\bar{X}^+ = \tilde{X}^+ \cup$ один элем. из C^+

$\bar{X}^0 \subset \tilde{X}^0$

$\underline{X}^- = \tilde{X}^- \cup$ один элемент из C^-

$\underline{X}^+ = \tilde{X}^+$

$\underline{X}^0 \subset \tilde{X}^0$

флип