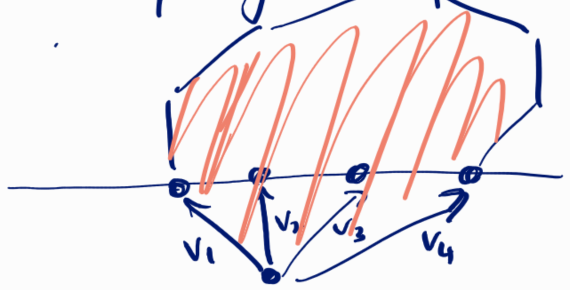
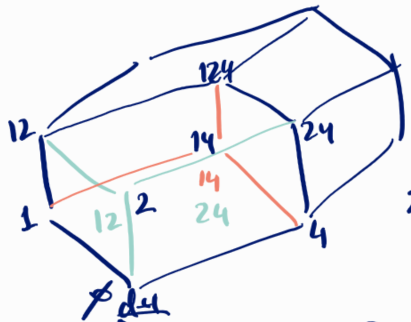
Циклический зонотоп $Z_{n,d} = \sum_{i=1}^{n} [0, v_i] \subset \mathbb{R}^d$

$v_i = (1, t_i, t_i^2, \dots, t_i^{d-1}) \in \mathbb{R}^d$ $\qquad t_1 < t_2 < \dots < t_n$ веществ. числа

↑ принадлежит кривой моментов

$d=2$:





$2v_1 + v_4 = 3v_2$

$\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_4 > 0$, $\alpha_2 < 0$

Флип "направления" $v_1, \dots, v_{d+1}$ зависит от $\sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i v_i = 0$, $\alpha_i \gtrless 0$

$$\sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i (1, t_i, t_i^2, \dots, t_i^{d-1}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{d+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^{d-1} & t_2^{d-1} & \dots & t_{d+1}^{d-1} \\ t_1^d & t_2^d & \dots & t_{d+1}^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{d+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Крамер: $\alpha_1 = \dfrac{\prod_{2 \leq i < j \leq d+1} (t_i - t_j)}{\prod_{1 \leq i < j \leq d+1} (t_i - t_j)} = \dfrac{1}{(t_1 - t_2) \dots (t_1 - t_{d+1})}$ $\qquad \operatorname{sign} \alpha_1 = (-1)^d$

$\operatorname{sign} \alpha_i = (-1)^{d+1-i}$

(1) Замощения $Z_{n,d}$ существуют (индукция по n), в каждом из них $\binom{n}{d}$ тайлов

(2) Ориентированные флипы замощений $Z_{n,d}$:

$$Z_{n,d+1} \xrightarrow{p_d} Z_{n,d}$$

$v_i^{(d+1)} = (1, t_i, \dots, t_i^d)$

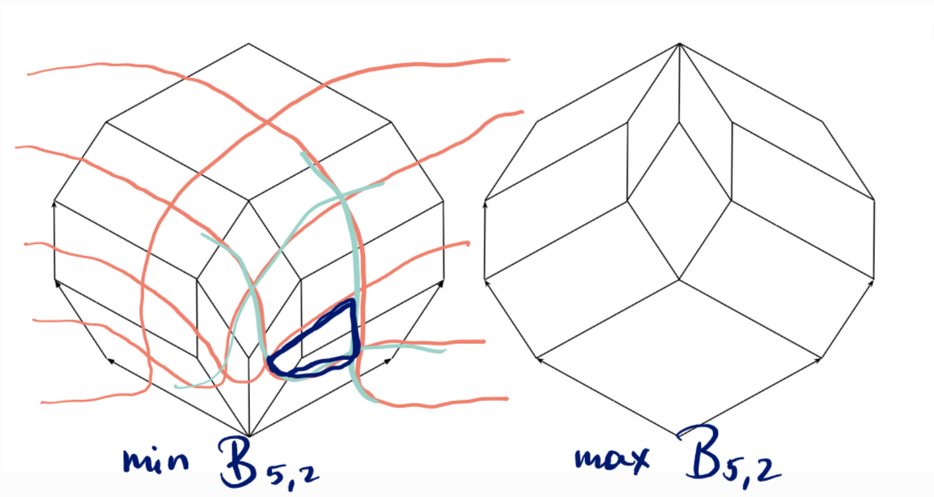
↓ "забывание"

$v_i^{(d)} = (1, t_i, \dots, t_i^{d-1})$

тайл в разм. $(d+1)$ имеет "верхние" грани (если смотрим на него из $(0, \dots, 0, +\infty)$) и "нижние" грани (из $(0, \dots, 0, -\infty)$)

(3) Частичный порядок $B_{n,d}$: замощения $Z_{n,d}$ и ориентир. флипы

В нём есть единственный минимум и единственный максимум



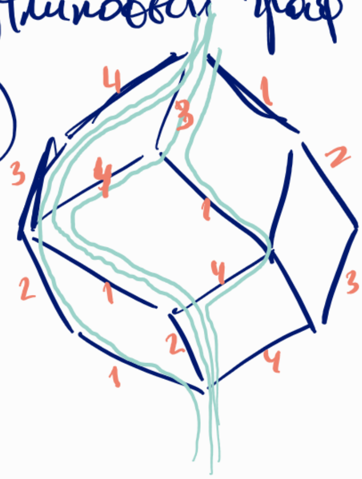
min $B_{5,2}$ max $B_{5,2}$

Инверсия : тройка проводов

замощение с N инв. $\xrightarrow{\text{ориент. флип}}$ замощ. с N+1 инв.

(4) Флиповый граф связен!

(5)



$$\begin{array}{l} 1234 \to 2134 \to 2143 \to 2413 \to \dots \to 4321 \\ 1234 \to 1243 \to 2143 \end{array}$$

перестановки

Элемент $B_{n,2}$ (проводная диаграмма) $\longleftrightarrow$ цепочка элементов $B_{n,1}$ вдоль полож. ор. флипов от min к max (порядок Брюа)

по модулю перестановки коммутирующих флипов

Теорема Существует естественная биекция

Элемент $B_{n,d+1}$ $\xleftrightarrow{1-1}$ цепочка элементов $B_{n,d}$ вдоль полож. флипов от min к max

по модулю перестановки коммутирующих флипов

тайл в $B_{n,d+1}$ $\longleftrightarrow$ флип в $B_{n,d}$

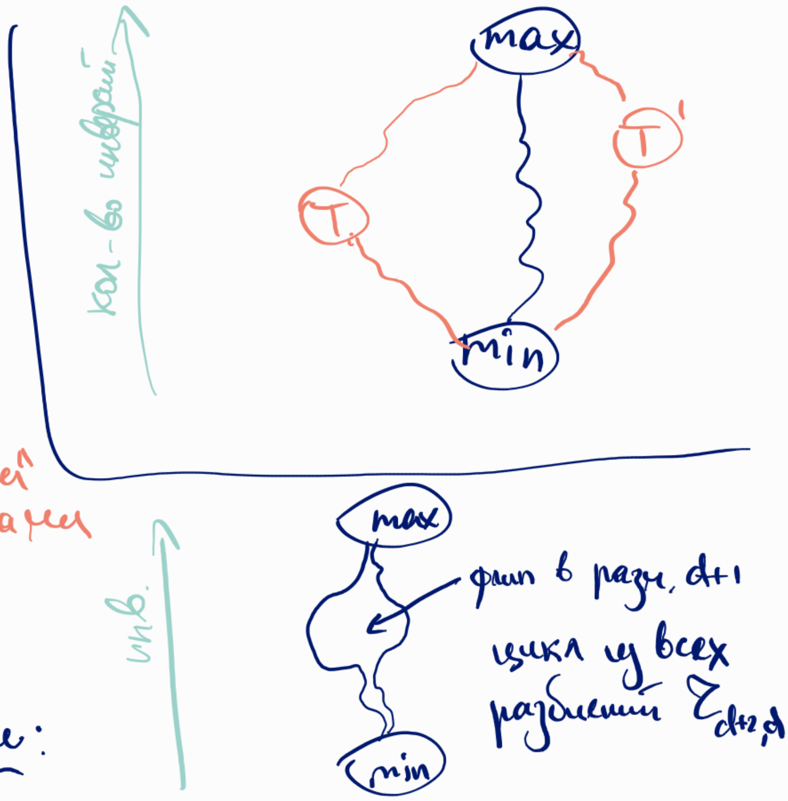
(6) Диаметр флипового графа замощений $Z_{n,d}$ $= \binom{n}{d+1}$

(7) Флип в зацеплениях $Z_{n,d+1}$

$\updownarrow$

две "близкие" цепочки зацеплений $Z_{n,d}$

связаны "высшими кокстеровскими" флипами



Теорема (B. – Wellman, 2020)

Соотношения между флипами:

Любой флиповый цикл в зац. $Z_{n,d}$ можно разбить в "сумму" элементарных:

1й тип: 4-угольник из двух коммут. флипов

2й тип: $(2d+4)$-угольник из всех зацеплений $Z_{d+2,2}$