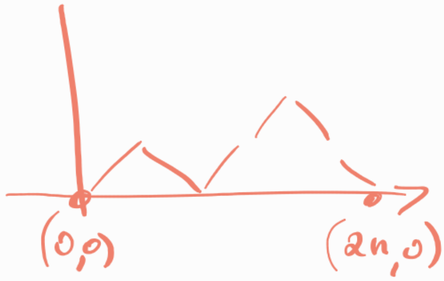
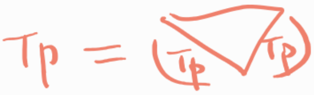
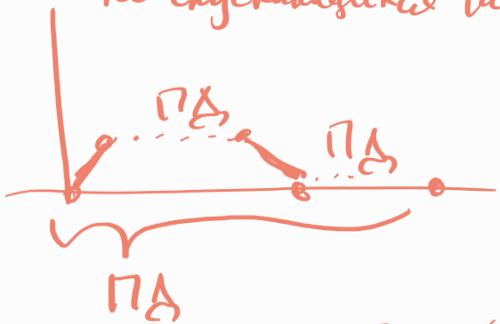
кол-во разбиений правильного (n+2)-уг. на треугольники



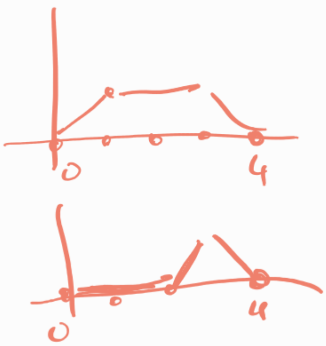
кол-во путей Дика (путей из (0,0) в (2n,0) вдоль ↗(1,1) ↘(1,-1), не спускающихся ниже оси абсцисс)

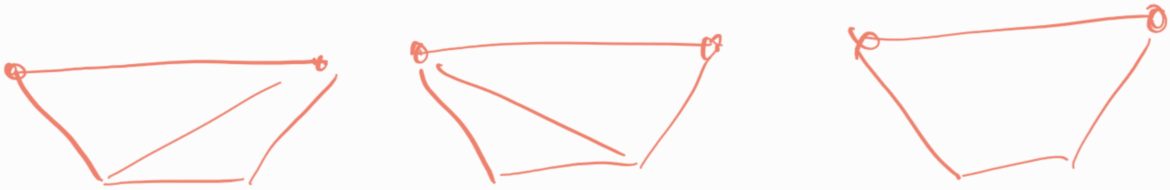




Числа Гиппарха h_n = кол-во способов разбить (n+2)-угольник на многоугольники посредством непересекающихся диагоналей

Числа Шрёдера S_n = кол-во путей из (0,0) в (2n,0) вдоль ↗(1,1), ↘(1,-1), $\xrightarrow[(2,0)]{}$, не спускающихся ниже оси абсцисс





$h_2 = 3$

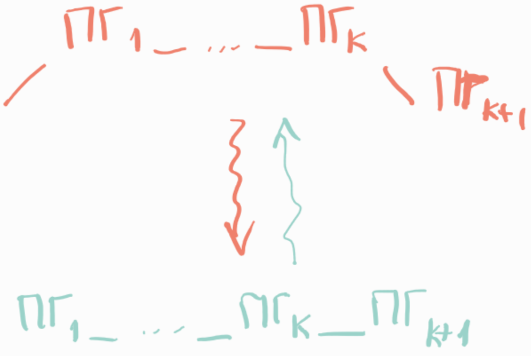
$S_2 = 6$

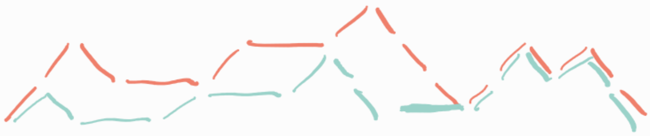
ПГ = / ПГ — ПГ — ... — ПГ \ ПГ

Путь Гиппарха — путь Шрёдера, не содержащий гориз. отрезков на оси абсцисс

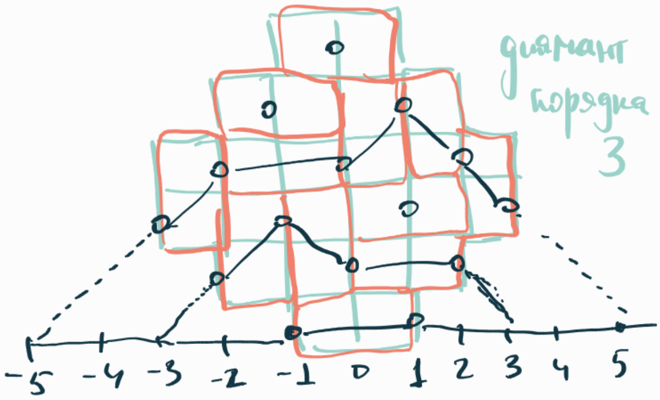
Лемма $S_n = 2h_n$

Д-во S_n → пути, содержащие гориз. отрезок на оси абсцисс
→ пути, не содержащие — // — (таких h_n)





Теорема (Elkies — Kuperberg — Larsen — Propp, 1992)
Кол-во способов разрезать ацтекский диамант порядка n на доминошки равно $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$



Д-во (Eu — Fu, 2005)

1) Разрезания $\xleftrightarrow{1-1}$ Системы непересек. путей Шрёдера
из -1 в 1
из -3 в 3
⋮
из $-2n+1$ в $2n-1$

2) Кол-во систем вот таких равно

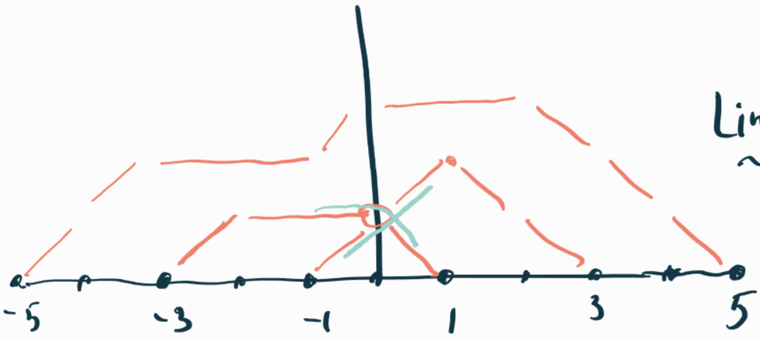
$$\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-1} \end{vmatrix}$$

(трюк Линдстрёма)

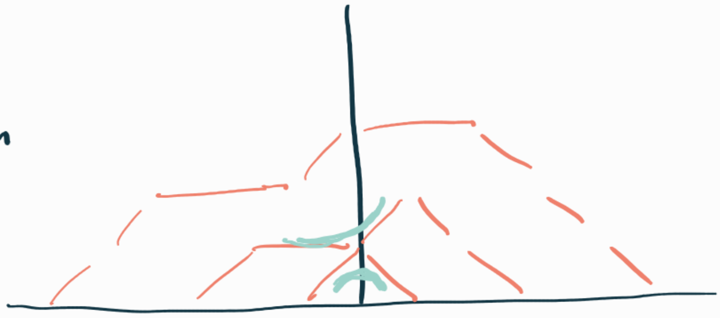
$$\| $$

$$\sum_{\text{перест. } \sigma} \operatorname{sign}\sigma \cdot S_{\sigma(1)} \cdot S_{1+\sigma(2)} \cdot \dots \cdot S_{n-1+\sigma(n)}$$

пути из -1 в $2\sigma(1)-1$
пути из -3 в $2\sigma(2)-1$
пути из $-2n+1$ в $2\sigma(n)-1$

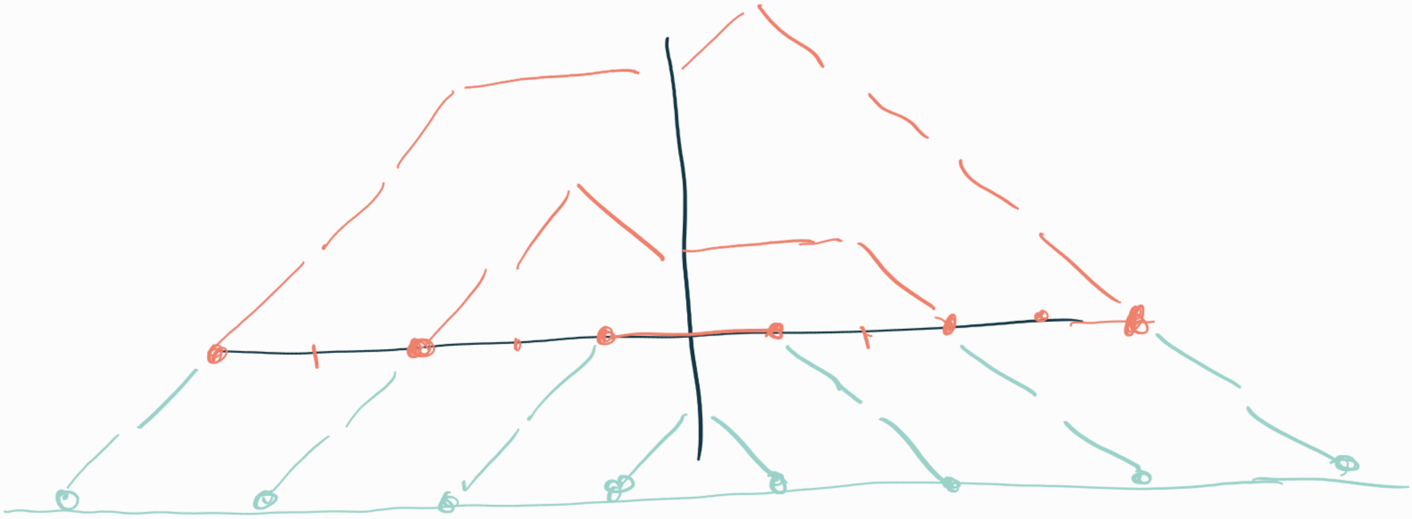


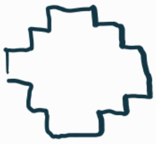
Lindström $\rightsquigarrow$



Аналогично, кол-во непересек. систем путей Гиппарха $\begin{pmatrix} \text{из } -1 \text{ в } 1 \\ \text{из } -3 \text{ в } 3 \\ \vdots \\ \text{из } -2n+1 \text{ в } 2n-1 \end{pmatrix}$

равно
$$\begin{vmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_n & h_{n+1} & \dots & h_{2n-1} \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-3} \end{vmatrix}$$



Кол-во разбиений  порядка n на доминошки =

$$= \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} \end{vmatrix} = 2^n \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ h_n & h_{n+1} & \dots & h_{2n-1} \end{vmatrix} = 2^n \begin{vmatrix} s_1 & \dots & s_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & \dots & s_{2n-3} \end{vmatrix} =$$

$$= 2^n 2^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} h_1 & \dots & h_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n-1} & \dots & h_{2n-3} \end{vmatrix} = \dots\dots = 2^n \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot \ldots \cdot 2^1 = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \blacksquare$$