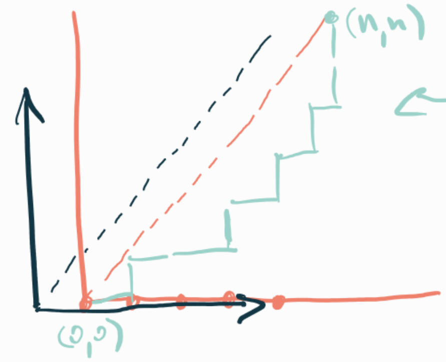
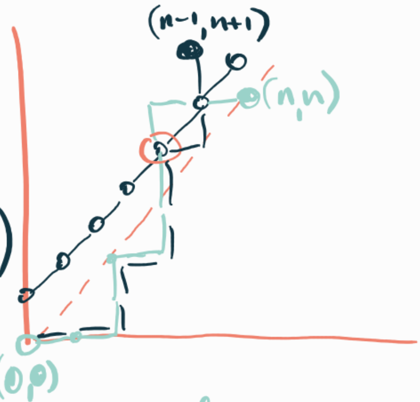


Кол-во таких путей

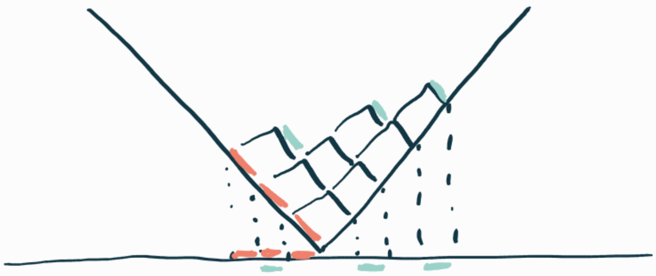
$n^{\text{ое}}$ число Каталана $= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$



Всего путей $\binom{2n}{n}$, из них поднимаются выше главной диагонали $\binom{2n}{n+1}$

$N = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ $\quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ $\quad$ диаграмма Юнга

Стандартная таблица (Юнга) —
— расстановка чисел от 1 до N в клетках диаграммы, возрастающая по строчкам и по столбцам



$0, \dots, k-1$

$l_k \quad \dots \quad l_1$

$l_i = \lambda_i + k - i$

Эквивалентная задача. Частицы стартуют в позициях $0, \dots, k-1$ и за N сдвигов оказываются в позициях $l_k, \dots, l_1$ (относительное положение частиц сохраняется). Сколько всего таких протоколов перемещение?

Трюк Линдстрёма: ответ равен

$$(\heartsuit) \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sign} \sigma \cdot \binom{N}{l_{\sigma(1)}-k+1,\ l_{\sigma(2)}-k+2,\ \dots,\ l_{\sigma(k)}}$$

Мультиномиальный коэффициент

$$\binom{N}{a_1, \dots, a_k} = \frac{N!}{a_1! \cdot \ldots \cdot a_k!}$$

$(N = a_1 + \dots + a_k)$

$\sigma = id$: $\binom{N}{l_1-k+1, \ldots, l_k}$ — кол-во протоколов перемещения частиц $0 \to l_k$, $1 \to l_{k-1}$, $\vdots$, $k-1 \to l_1$

(без требования на обгоны)

σ произв. $\binom{N}{l_{\sigma(1)}-k+1, \ldots, l_{\sigma(k)}}$ — кол-во протоколов перемещения частиц

$0 \to l_{\sigma(k)}$
$1 \to l_{\sigma(k-1)}$
$\vdots$
$k-1 \to l_{\sigma(1)}$

Заметим, что в сумме ($\heartsuit$) сокращаются все "плохие" протоколы с обгонами

"Плохие" протоколы бьются на пары: выбрать "самый первый" момент, когда координаты каких-то двух частиц совпали и после этого обменять их траектории

"Хорошие" (без обгонов) протоколы соотв. $\sigma = id$

$$(\heartsuit)\ \sum_\sigma \operatorname{sign}\sigma \cdot \frac{N!}{(l_{\sigma(1)}-k+1)! \ldots l_{\sigma(k)}!} =$$

$$= \frac{N!}{l_1! \ldots l_k!} \sum_\sigma \operatorname{sign}\sigma \cdot l_{\sigma(1)}^{\underline{k-1}} \cdot l_{\sigma(2)}^{\underline{k-2}} \cdot \ldots \cdot l_{\sigma(k-1)}^{\underline{1}}$$

$$\boxed{l^{\underline{a}} = l(l-1)\cdot\ldots\cdot(l-a+1)}$$

$$= \frac{N!}{l_1! \ldots l_k!} \begin{vmatrix} l_1^{\underline{k-1}} & l_2^{\underline{k-1}} & \ldots & l_k^{\underline{k-1}} \\ l_1^{\underline{k-2}} & l_2^{\underline{k-2}} & \ldots & l_k^{\underline{k-2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_k \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Вандермонд}}{=}$$

$$= \frac{N!}{l_1! \ldots l_k!} \prod_{i<j} (l_i - l_j)$$

Как многочлен от переменных $l_1, \ldots, l_k$, обнуляется при $l_i = l_j$, значит, делится на $\prod (l_i - l_j)$

Формула Фробениуса–Юнга

Кол-во стандартных таблиц, соотв. диаграмме Юнга $(\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k)$, равно

$$\frac{N!}{l_1! \dots l_k!} \cdot \prod_{i<j} (l_i - l_j)$$

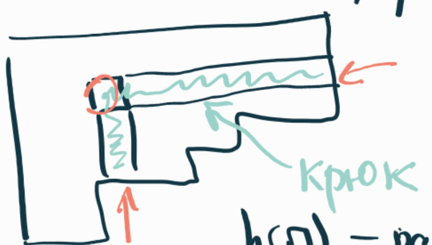
(Здесь $N = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$, $l_i = \lambda_i + k - i$)

(Доказательство Zeilberger'а, 1983)

Формула крюков (Frame – Robinson – Thrall, 1954)

Кол-во стандартных таблиц, соотв. диаграмме Юнга $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$), равно

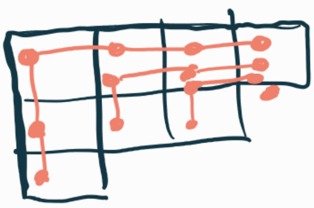
$$\frac{N!}{\prod\limits_{\square \in \text{диаграмме}} h(\square)}$$



$h(\square)$ = размер крюка

Нужно проверить: $l_1! \cdot \ldots \cdot l_k! = \prod h(\square) \cdot \prod\limits_{i<j} (l_i - l_j)$

Достаточно проверить, что $\forall i$: $l_i! = \prod\limits_{j>i} (l_i - l_j) \cdot \prod\limits_{1 \leq j \leq \lambda_i} h(\overset{j}{i\,\square})$



$l_i = \lambda_i + k - i$