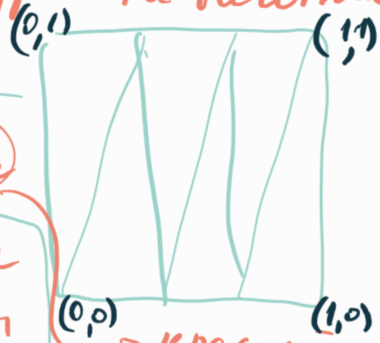
Теорема (Monsky, 1970) Нельзя разрезать квадрат на нечётное количество треугольников равной площади

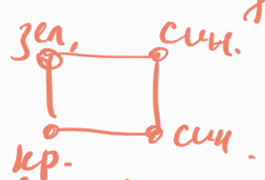


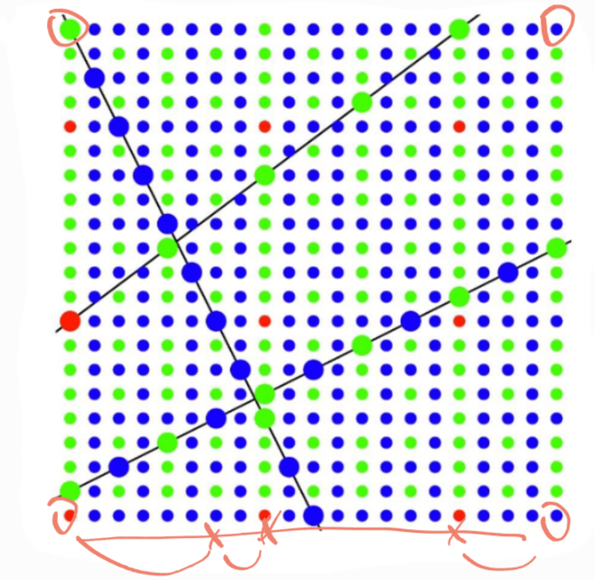
Идея: раскрасить все точки единичного квадрата в 3 цвета так, чтобы

$\boxed{\text{площадь разноцветного треугольника не равнялась бы нулю, не равнялась бы } 1/\text{нечёт}}$

→ красный, синий, зелёный

+ главные вершины квадрата

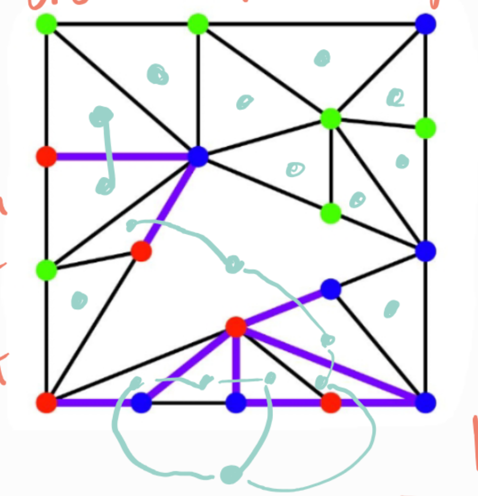




Докажем, что в любом разрезании на треугольники есть разноцветный треугольник (E. Sperner)

Пусть дано разрезание на Δ-ки

- На нижней стороне нечётное количество красно-синих отрезков
- На других сторонах красно-синих отрезков нет



Разрезание — схема замка
двери — красно-синие отрезки

У внешности нечётное число соседей

У внутренних неразноцветных комнат чётное число соседей

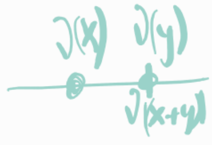
У разноцветных комнат — нечётное число соседей $\Longrightarrow$ Кол-во разноцветных комнат нечётно

Нам понадобится вспомогательная функция $\nu(\cdot)$ со следующими свойствами: (Пока что $\nu: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$)

1) $\nu(x) = 0 \iff x = 0$
2) $\nu(xy) = \nu(x)\nu(y)$
3) $\nu(x+y) \le \max(\nu(x), \nu(y))$ [Неархимедовость]

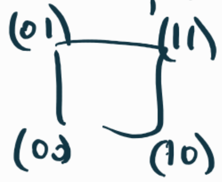
Следствия: $\nu(1) = 1$, $\nu(-x) = \nu(x)$, $\nu(x^{-1}) = \nu(x)^{-1}$,

Если $\nu(x) \neq \nu(y)$, то $\nu(x+y) = \max(\nu(x), \nu(y))$



$\nu(y) = \nu((x+y)+(-x)) \le \max(\nu(x+y), \nu(x))$

Предположим, у нас есть такая валюация ν, причём $\nu(\frac{1}{2}) > 1$, тогда красим квадрат



так:

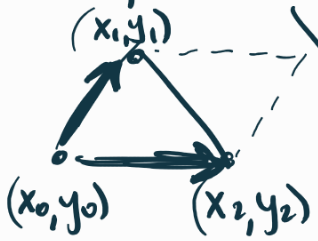
Точка (x,y) получает цвет

0 (синий), если $\nu(x) \ge \nu(y)$, $\nu(x) \ge \nu(1)$

1 (зелёный), если $\nu(x) < \nu(y)$, $\nu(y) \ge \nu(1)$

2 (красный), если $\nu(x) < \nu(1)$, $\nu(y) < \nu(1)$

Area



$$= \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & 0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & 0 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

(x_0,y_0) синяя

(x_1,y_1) зелёная

(x_2,y_2) красная

Замечание для экспертов

$$\left|2^k \frac{2r+1}{2s+1}\right|_2 = 2^{-k}$$

Продолжаем на $\mathbb{Q}_2$ (пополнение $\mathbb{Q}$ по $|\cdot|_2$)

Продолжаем на $\widehat{\mathbb{Q}}_2$ (алгебраическое замыкание)

Проверяется, что $\widehat{\mathbb{Q}}_2 \simeq \mathbb{C}$

Ограничиваемся на $\mathbb{R}$

$\pm 2\,\mathrm{Area}(\Delta) = x_0 \cdot y_1 \cdot 1 +$ ещё 5 слагаемых

$\nu(\pm 2\,\mathrm{Area}(\Delta)) = \nu(x_0 \cdot y_1 \cdot 1 +$ ещё 5 слагаемых, у которых ν меньше, чем $\nu(x_0)\nu(y_1)\nu(1))$

$= \nu(x_0)\,\nu(y_1)\,\nu(1) = \nu(x_0)\,\nu(y_1) \ge 1$

$\nu(\mathrm{Area}(\Delta)) \ge \frac{1}{\nu(2)} = \nu(\frac{1}{2}) > 1$

Значит, $\mathrm{Area}(\Delta) \ne 0$, $\mathrm{Area}(\Delta) \ne \frac{1}{\text{нечёт}}$

$\nu(2) < 1$

$\nu(2r) = \nu(2+2+\ldots+2) \le \nu(2) < 1$

$\nu(1) = 1$

$\nu(2r+1) = \max(\nu(2r), \nu(1)) = 1$

(Lenstra) Построим $v: \mathbb{R} \to G \cup \{0\}$

упорядоченная абелева группа

Пусть $B \supseteq \mathbb{Z}$ — максимальное по включению подкольцо $\mathbb{R}$, не содерж. $\frac{1}{2}$

подмнож. $\mathbb{R}$, замкнутое относ. сложения и умножения

(по лемме Цорна оно существует)

Докажем $B \cup B^{-1} = \mathbb{R}$ (Здесь $B^{-1} = \{b^{-1}, 0 \neq b \in B\}$)

Предположим, $\exists \alpha \notin B$, $\alpha^{-1} \notin B$

$\frac{1}{2} \in B[\alpha] \Rightarrow 1 = 2u_0 + 2u_1\alpha + \ldots + 2u_m\alpha^m \quad u_i \in B$

$\frac{1}{2} \in B[\alpha^{-1}] \Rightarrow 1 = 2v_0 + 2v_1\alpha^{-1} + \ldots + 2v_n\alpha^{-n} \quad v_i \in B \qquad m \geq n$

$\Downarrow$

$(1-2v_0)\alpha^n = 2v_1\alpha^{n-1} + \ldots + 2v_{n-1}\alpha + 2v_n$

$1 = (1-2v_0) + 2v_0 = 2(u_0(1-2v_0) + v_0) + 2u_1(1-2v_0)\alpha + \ldots$

$\ldots + 2u_m \boxed{(1-2v_0)\alpha^n}\,\alpha^{m-n}$

противоречие

Интуиция

$U = B \cap B^{-1} \longrightarrow v(\cdot) = 1$

$B \setminus U \longrightarrow v(\cdot) < 1$

$B^{-1} \setminus U \longrightarrow v(\cdot) > 1$

$G = \mathbb{R}^\times / U$

$xU < yU$ если $xy^{-1} \in B$

$v(0) = 0 \in G \cup \{0\}$

$v(x) = xU \in G \cup \{0\}$

$v(\frac{1}{2}) > 1$

Свойства валюации проверяются