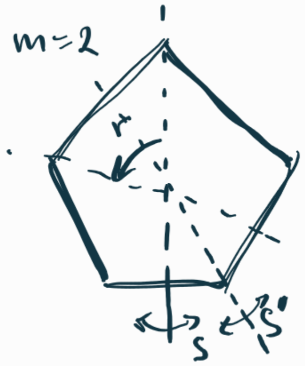


$$\mathrm{Sym}\, D_m = \langle r, s\rangle = \langle s, s'\rangle$$

порождающие

$s's = r$

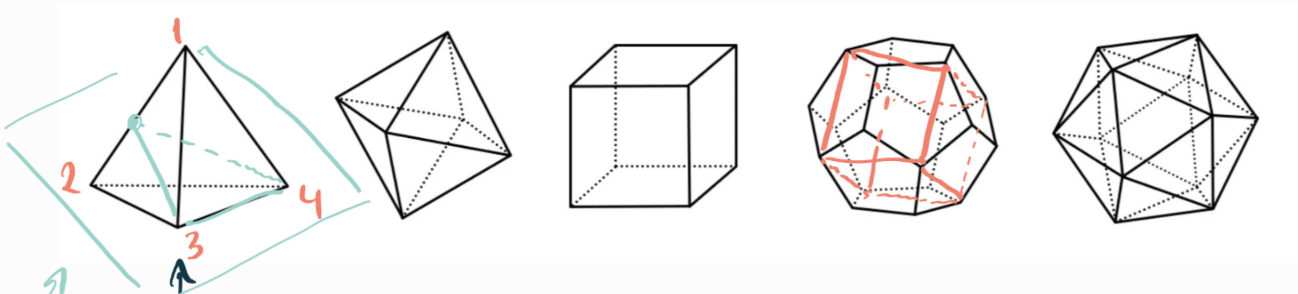
$s^2 = id = s'^2$

$(s's)^m = id$

Утв. Любое соотношение в диэдральной группе выражается через элементарные

$$\mathrm{Sym}\, D_m = \langle s, s' \mid s^2, s'^2, (s's)^m \rangle$$

Платоновы тела



Tetr

$\mathrm{Sym}\,\mathrm{Tetr} \cong S_4$ (группа перестановок вершин)

Отражение $\leftrightarrow (12)$

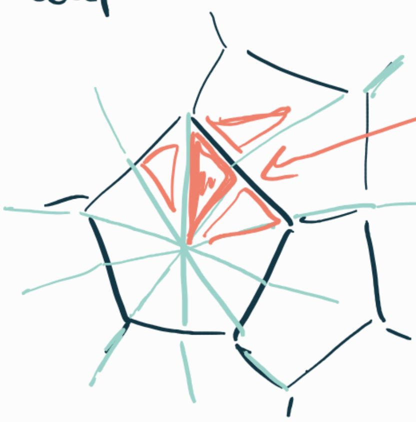
Группа перестановок S_n порождается транспозициями $(12), (23), \dots, (n{-}1\ n)$

$\mathrm{Sym}^+\mathrm{Tetr} \cong A_4$ (знакопеременная группа, т.е. из чётных перестановок)

Двойственным телом (или полярным) к множеству $P \subset \mathbb{R}^n$ ($0 \in \mathrm{int}\, P$, P замкнутое выпуклое) называется $P^\circ = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle \le 1 \ \forall x \in P \}$

Гиперплоскости $\langle x, y \rangle = 1$ для x – вершины P ограничивают P°

Классификация платоновых тел:

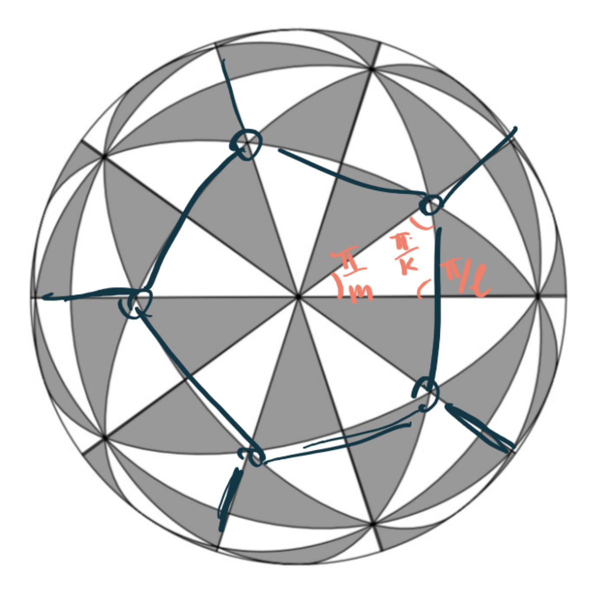


Треугольники барицентрического подразделения многогранника

или

флаг (вершина $\subset$ ребро $\subset$ грань $\subset \dots$)

Определение Правильный многогранник — тот, на флагах которого симметрии действуют транзитивно (т.е. любой можно перевести в любой)



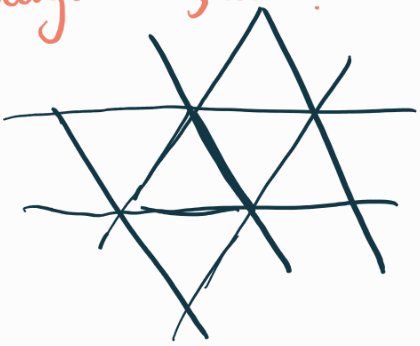
$\frac{\pi}{k}+\frac{\pi}{l}+\frac{\pi}{m} > \pi$

$\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m} > 1$ → конечное число решений

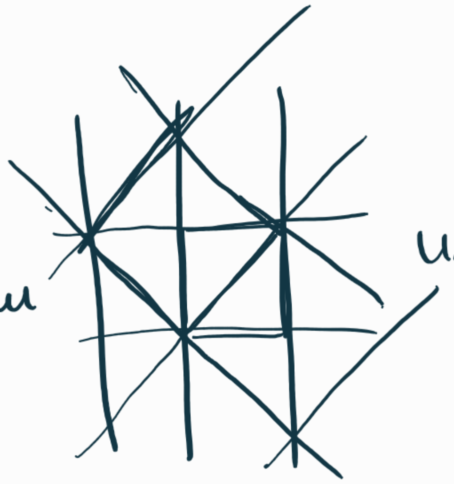
↓

конечное число платоновых тел

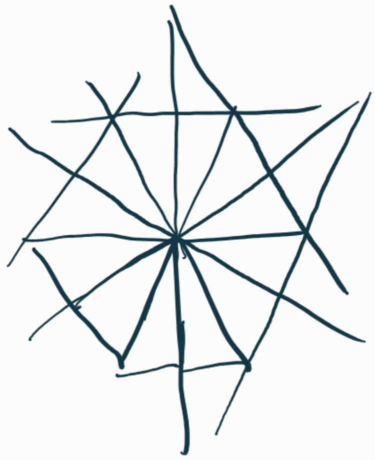
Евклидов случай:



или

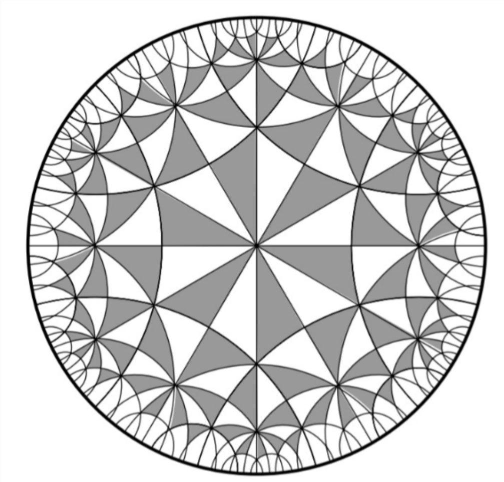


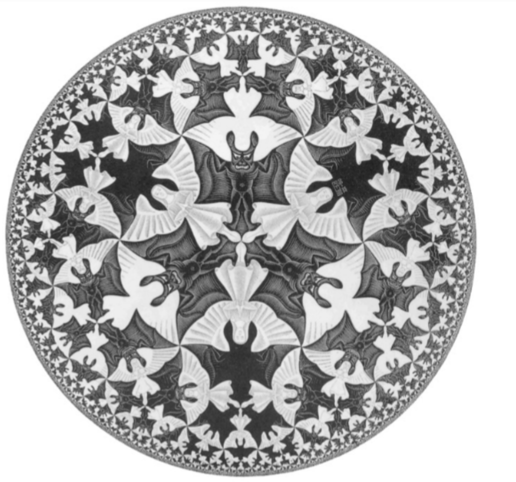
или



Классификация: $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m} = 1$

Гиперболический случай: $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m} < 1$





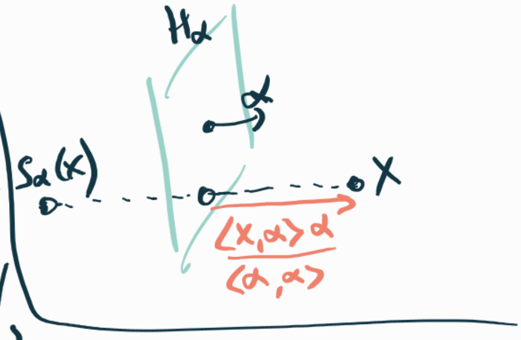
Пусть $V (= \mathbb{R}^n)$ — вещественное векторное пр-во размерности n со скалярным произведением $\langle \cdot , \cdot \rangle$

$0 \neq \alpha \in V$ ⇝ гиперплоскость $H_\alpha = \{x \in V \mid \langle x, \alpha \rangle = 0\} = \langle \alpha \rangle^\perp$

Отражение в "зеркале" H_α — ортогональное преобразование s_α

$s_\alpha(\alpha) = -\alpha$, $s_\alpha|_{H_\alpha} = \mathrm{id}$ (т.е. $s_\alpha(x) = x$ $\forall x \in H_\alpha$)

Утв. $s_\alpha(x) = x - 2\dfrac{\langle x,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha$



(Конечная)

Определение. Группой отражений называется подгруппа группы движений V, порождённая конечным числом отражений $s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_N}$ (при условии, что она конечна).

Примеры 1) $e_1, \dots, e_n$ — ортонорм. базис $\mathbb{R}^n$

$s_{e_i-e_j}$ переставляет e_i и e_j и сохраняет e_k, $k \neq i,j$

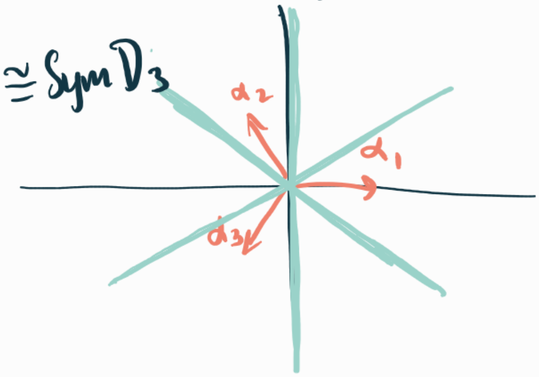
$\langle s_{e_i-e_j},\ i\neq j\rangle$ группа отражений типа A_{n-1}

Вектор $e_1+e_2+\dots+e_n$ инвариантен относительно этой группы

Гиперплоскость $\langle e_1+\dots+e_n\rangle^\perp = \tilde V$ тоже инвариантна

Можно считать, что A_{n-1} действует на $(n-1)$-мерном $\tilde V$

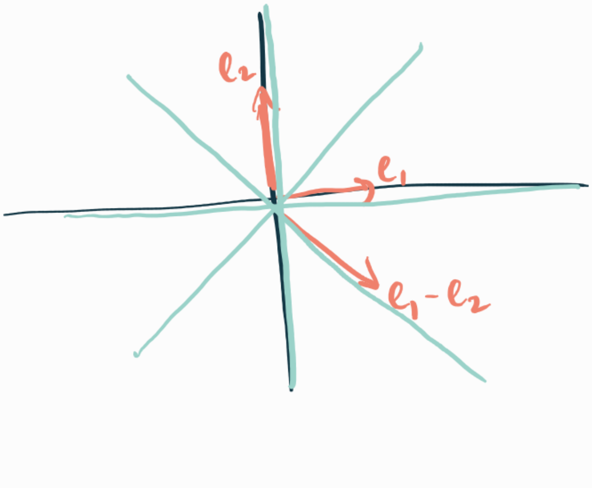
$A_2 \cong \mathrm{Sym}\,D_3$



$A_{n-1} \cong S_n$

2) Группа отражений типа B_n порождается $s_{e_i-e_j}$, $i\neq j$, s_{e_i}

B_2



$B_n = S_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$

полупрямое произведение

3) Группа отражений типа D_n порождена отражениями

$$s_{e_i - e_j}$$
$$s_{e_i + e_j}$$

— подгруппа B_n индекса 2 (заменить знак можно у чётного числа координат)

D_2