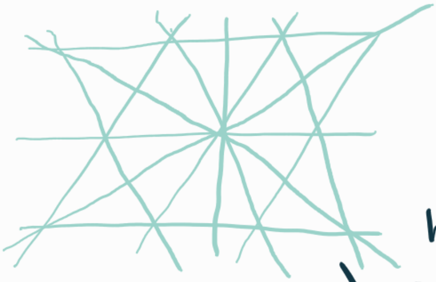
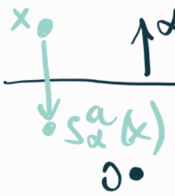


Определение Аффинной группой отражений W (в пространстве $V \simeq \mathbb{R}^n$ со скал. произв. $\langle \cdot, \cdot \rangle$) называется подгруппа (аффинных) движений V, которая а) дискретна
б) порождена отражениями



$H^a_\alpha = \{x \in V \mid \langle x, \alpha \rangle = a\}$

Линейное отражение в зеркале $H_\alpha = H^0_\alpha$:

$$S_\alpha(x) = S^0_\alpha(x) = x - 2\frac{\langle x, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$$

Аффинное отражение в зеркале H^a_α:

$$S^a_\alpha(x) = S_\alpha\left(x - \frac{a\alpha}{|\alpha|}\right) + \frac{a\alpha}{|\alpha|}$$

$$W \cdot x = \{\underbrace{w \cdot x}_{\text{действие движения } w \text{ на точку } x} \mid w \in W\}$$

$\downarrow$

не имела предельных точек (кроме случая, когда $x \in$ всем зеркалам)

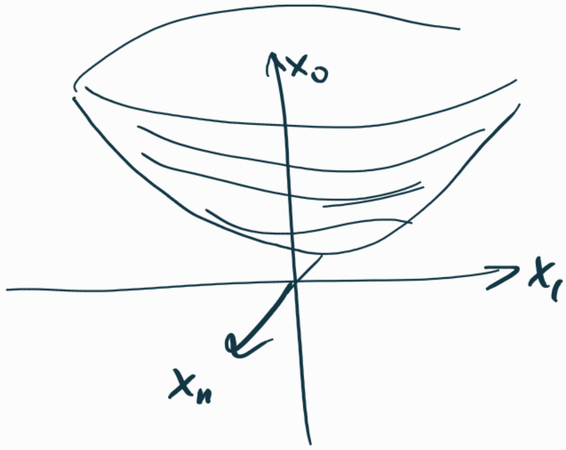
Замечание для экспертов

Гиперболические группы отражений можно изучать, погрузив $H^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ как однополостный гиперболоид

$\langle x, x \rangle = -1$, $x_0 > 0$

$\langle x, x' \rangle = -x_0 x_0' + x_1 x_1' + \ldots + x_n x_n'$

$$S_\alpha(x) = x - 2\frac{\langle \alpha, x \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$$



Группа Кокстера $W = \langle s_1, s_2, \ldots \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = id \rangle = \langle S \mid R \rangle$

$m_{ii} = 1$
$m_{ij} = m_{ji} \geq 2$ $(i \neq j)$ но вообще говоря может быть $= \infty$

Элементы группы $\langle S|R \rangle$ — слова в алфавите $\{s_1, s_1^{-1}, s_2, s_2^{-1}, \ldots\}$ по модулю элементарных преобразований:

$uv \longleftrightarrow uss^{-1}v$
$uv \longleftrightarrow us^{-1}sv$
$uv \longleftrightarrow urv$, $r \in R$

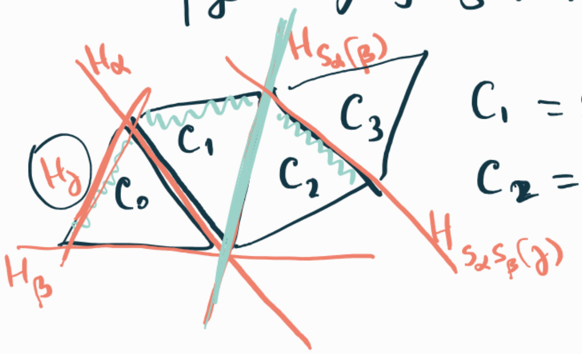
$$W = \frac{\langle S \rangle}{\text{миним. нормальная подгруппа в } \langle S \rangle \text{, содерж. } R}$$

Теорема (Конечная или аффинная) Группа отражений — группа Кокстера

Пространство V, группа отражений $W=\langle\{s_\alpha \mid \alpha\in\Phi\}\rangle$
в зеркалах H_α

Зеркала H_α разрезают V на <u>камеры Вейля</u>

Фиксируем одну из камер C_0 — "фундаментальная камера"



$$C_1 = s_\alpha C_0$$

$$C_2 = s_{s_\alpha(\beta)} C_1 = s_{s_\alpha(\beta)} s_\alpha C_0 = s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\alpha C_0 = s_\alpha s_\beta C_0$$

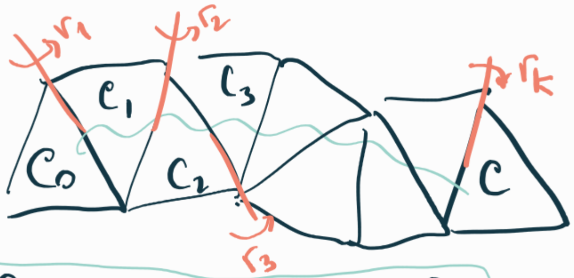
$$C_3 = s_{s_\alpha s_\beta(\gamma)} C_2 = \underbrace{s_\alpha s_\beta s_\gamma s_\beta s_\alpha}_{r_3} \cdot s_\alpha s_\beta C_0 = s_\alpha s_\beta s_\gamma C_0$$

<u>Лемма</u>

$s_{s_\alpha(\beta)} = s_\alpha s_\beta s_\alpha$

$s_{s_\alpha s_\beta(\gamma)} = s_\alpha s_\beta s_\gamma s_\beta s_\alpha$

$s_{r(\gamma)} = r s_\gamma r^{-1}$



Рассм. путь из C_0 в C, не проходящий через $\bigcup_{\alpha\neq\beta} H_\alpha \cap H_\beta$

s_{α_i} — отражения в стенках C_0

$$\boxed{C = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \cdots s_{\alpha_k} C_0}$$

$= r_k \ldots r_2 r_1 C_0$, где $r_1 = s_{\alpha_1}$

$r_2 = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}$

$r_3 = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_3} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}$ и т.д.

r_i — отражение переводящее C_{i-1} в C_i

= сопряжение s_{α_i} посредством g (переводит C_0 в C_{i-1})

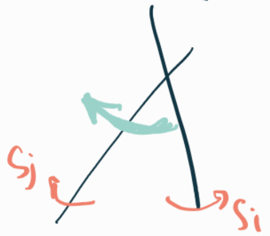
$r_i = g s_{\alpha_i} g^{-1}$

Докажем, что W порождается отражениями в стенках C_0 с соотношениями Кокстеровского типа

Пусть $s_1, \ldots, s_N$ — простые отражения, т.е. отражения в стенках C_0

Тогда $s_i^2 = id$

$(s_i s_j)^{m_{ij}} = id$ ($m_{ij} = \infty$, если зеркала параллельны)



Предположим, даны два пути из C_0 в C

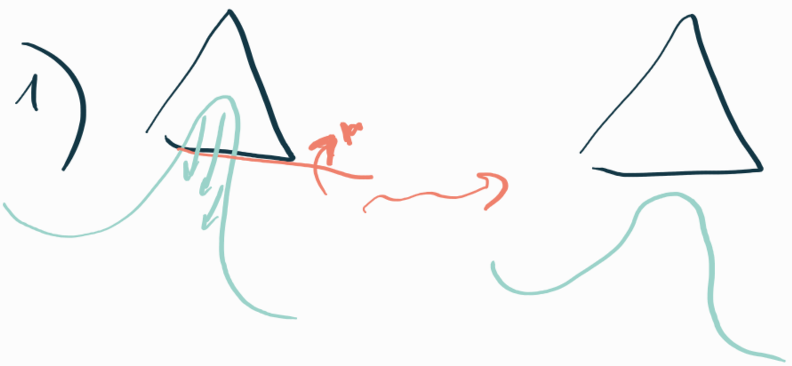
Эквивалентно, дана петля из C_0 в C_0, ей соответствует слово, сост. из s_i

Нужно показать, что элем. преобразованиями его можно превратить в пустое

Петля Γ не проходит через $\bigcup H_\alpha \cap H_\beta$

Стягиваем Γ, в процессе меняется цепочка камер двумя способами

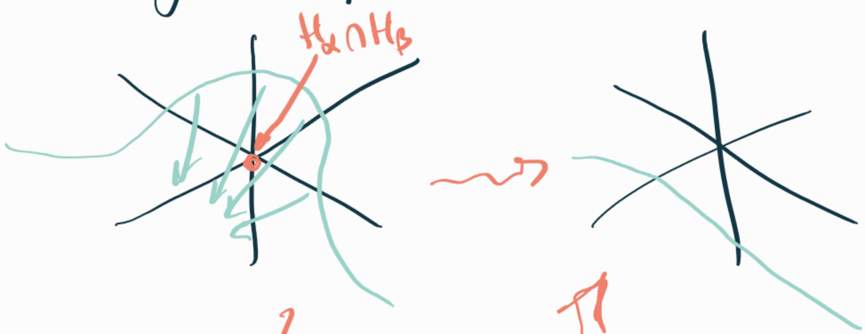
1)

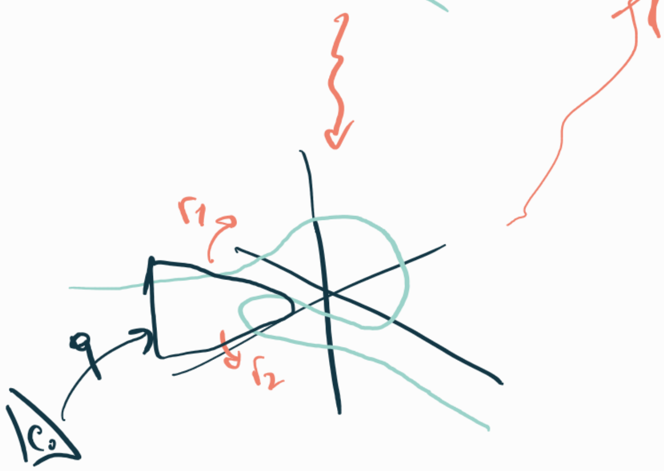


$r = q s_\alpha q^{-1}$

$q s_\alpha q^{-1} q s_\alpha q^{-1} \leftrightarrow \emptyset$

2) критические моменты когда Γ пересекает $\bigcup H_\alpha \cap H_\beta$





$(r_1 r_2)^m = id$

$r_1 = q s_\alpha q^{-1}$

$r_2 = q s_\beta q^{-1}$

Использ. элем. преобр. $(s_\alpha s_\beta)^{m_{\alpha\beta}} \leftrightarrow \emptyset$

<u>Следствие</u> $|W| = \#$ камер Вейля

<u>Пример</u> $A_{n-1} = S_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid s_i^2 = id,\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1},\ s_i s_j = s_j s_i,\ |j-i|>1 \rangle$