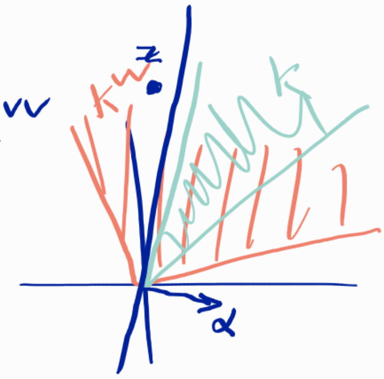
Выпуклое отвлечение Конус в $\mathbb{R}^n$ — множество, которое вместе с любой точкой $x\in K$ содержит все λx, $\lambda\geq 0$

Выпуклый конус — вместе с любыми своими точками $x,y\in K$ содержит все $\lambda x+\mu y$, $\lambda,\mu\geq 0$

Двойственность: $K^\vee=\{y\in\mathbb{R}^n \mid \langle x,y\rangle\geq 0 \ \forall x\in K\}$

$\left.\begin{matrix} x\in K \\ y\in K^\vee\end{matrix}\right\} \Rightarrow \langle x,y\rangle\geq 0$, следовательно $K\subset K^{\vee\vee}$



Утв. Если K — выпуклый замкнутый конус, то $K=K^{\vee\vee}$

Д-во Пусть $z\in K^{\vee\vee}\setminus K$, строго отделим z от K:

$\langle z,\alpha\rangle<0$, $\forall x\in K \ \langle x,\alpha\rangle\geq 0$

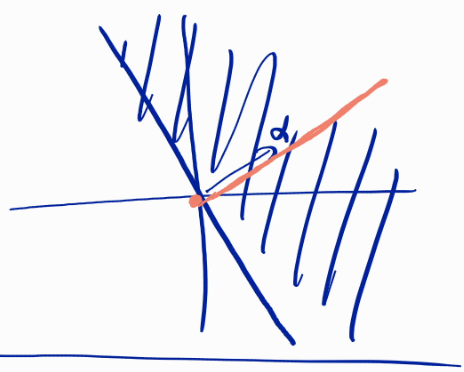
$\Downarrow$ $\qquad\qquad \Downarrow$

$z\notin K^{\vee\vee} \Leftarrow \alpha\in K^\vee$

$\square$

Утв. $K_1^\vee\cap K_2^\vee=(\mathrm{conv}(K_1\cup K_2))^\vee$, $(K_1\cap K_2)^\vee=\mathrm{conv}(K_1^\vee\cup K_2^\vee)$

Утв. $\{x \mid \langle x,\alpha\rangle\geq 0\}^\vee=\{\lambda\alpha \mid \lambda\geq 0\}$



Сеттинг конечных групп отражений:
конечная система гиперплоскостей $H_\alpha\subset V=\mathbb{R}^n$
заданных нормалями $\alpha\in\Phi$, $\langle\alpha,\alpha\rangle=1$,
инвариантная относительно отражений s_α (в зеркалах H_α)

Определение Системой корней называется конечный набор векторов $\Phi\subset V$, такой что

(0) V порождается векторами Φ

(1) $\{\lambda\alpha \mid \lambda\in\mathbb{R}\}\cap\Phi=\{\alpha,-\alpha\}$ $\forall\alpha\in\Phi$

(2) $s_\alpha\Phi=\Phi$ $\quad\forall\alpha\in\Phi$

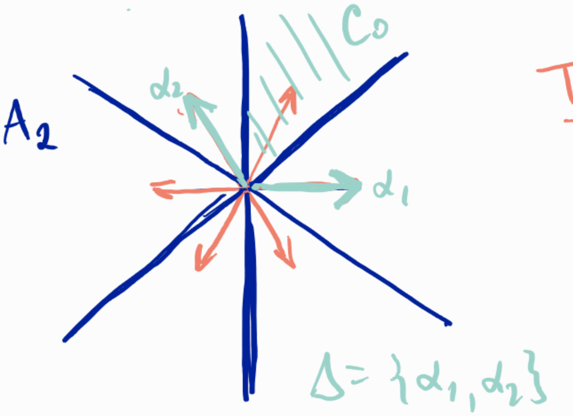
Иногда рассматривают кристаллографические системы корней:

(3) $2\dfrac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\in\mathbb{Z}$

$\bigcup\limits_{\alpha\in\Phi} H_\alpha$ разрезает V на камеры, зафиксируем "фундамент. камеру" C_0

Система внутренних нормалей к стенкам C_0 — $\Delta \subset \Phi$

система простых корней



Теорема ① Любой корень $\alpha \in \Phi$ представим в виде $\sum_{\gamma\in\Delta} c_\gamma \gamma$, причём либо все $c_\gamma \geq 0$, либо все $c_\gamma \leq 0$.

② Δ — линейно независимы

Д-во $C_0 = \{x \mid \langle x,\alpha\rangle \geq 0 \ \forall \alpha\in\Delta\}$

$$= \bigcap_{\alpha\in\Delta}\{x\mid\langle x,\alpha\rangle\geq 0\}$$

$$K = (C_0)^\vee = \mathrm{Conv}\Big(\bigcup_{\alpha\in\Delta}\{\lambda\alpha \mid \lambda\geq 0\}\Big) = \Big\{\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha\alpha \;\Big|\; c_\alpha\geq 0\Big\}$$

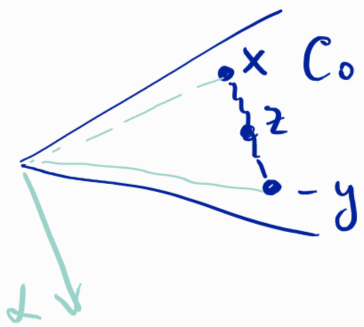
1) Хотим: $\Phi \subset K \cup (-K)$

Если $\alpha\notin K = (C_0)^\vee$, то

$\langle\alpha,x\rangle<0$ для какого-то $x\in C_0$

Если $\alpha\notin(-K)$, то

$\langle\alpha,y\rangle<0$ для какого-то $y\in(-C_0)$



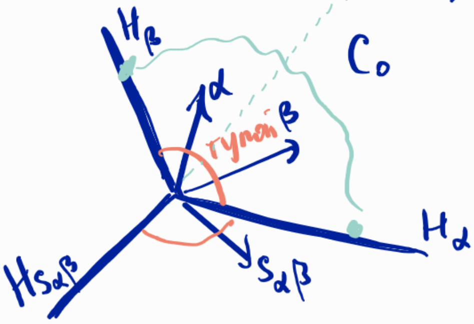
$z\in C_0$ пробегает путь от x к $(-y)$

$\langle\alpha,x\rangle<0$ ... $\langle\alpha,z\rangle=0$ ... $\langle\alpha,-y\rangle>0$

H_α пересекает C_0 по внутренности

② **Лемма** $\forall \alpha,\beta\in\Delta$, $\alpha\neq\beta$ $\quad \langle\alpha,\beta\rangle\leq 0$

Если нашлись $\alpha,\beta\in\Delta$, $\langle\alpha,\beta\rangle>0$



Зеркало $H_{s_\alpha\beta}$ разрезает тупой двугранный угол между H_α и H_β (а тогда и камеру C_0)

Предположим, есть линейная зависимость в Δ: $\sum_{\alpha\in\Delta} a_\alpha \alpha = 0$

$$\sigma = \sum b_i\beta_i = \sum c_i\gamma_i$$

$b_i>0 \qquad c_i>0$

$$\langle\sigma,\sigma\rangle = \sum \underbrace{b_i c_j}_{>0}\underbrace{\langle\beta_i,\gamma_j\rangle}_{\leq 0} \leq 0 \Rightarrow \sigma=0$$

противоречие т.к. C_0 — полноразмерный $\Rightarrow K$ — направленный

Система простых корней $\Delta \subset V = \mathbb{R}^n$

$\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = -\cos \frac{\pi}{m_{ij}}$

$\angle(\alpha_i, \alpha_j) = \pi - \frac{\pi}{m_{ij}}$

Матрица Грама $\Gamma = \left(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \right)_{i,j=1}^{n}$ положительно определена

<u>Определение</u> Схема Кокстера (диаграмма Дынкина) системы корней — граф с отметками на рёбрах, построенный следующим образом:

вершины $\longleftrightarrow$ простые корни $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

нет ребра между i, j $\longleftrightarrow$ $m_{ij} = 2 \iff \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$

ребро без отметки между i, j $\longleftrightarrow$ $m_{ij} = 3 \iff \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = -\frac{1}{2}$

ребро с отметкой m между i, j $\longleftrightarrow$ $m_{ij} = m \geq 4 \iff \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = -\cos \frac{\pi}{m}$

Разложимая система корней: $V = V_1 \oplus V_2$ (ортогональное разложение)

$\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, Φ_i — система корней в V_i

Схема Кокстера Φ несвязная

Неразложимая система корней $\longleftrightarrow$ Схема Кокстера связная

<u>Пример</u> $\boxed{A_{n-1}}$ $\Phi = \left\{ \frac{e_i - e_j}{\sqrt{2}} \right\} \subset \tilde{V} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i = 0\}$

$e_1, \dots, e_n$ — ОНБ в $\mathbb{R}^n$

$\Delta = \left\{ \frac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_2 - e_3}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{e_{n-1} - e_n}{\sqrt{2}} \right\}$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \\ & -\frac{1}{2} & 1 & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Схема Кокстера 

$\boxed{B_n}$ 

$\boxed{D_n}$