Конечная группа отражений $\longleftrightarrow$ Схема Коксетера $\longleftrightarrow$ положительно опред. матрица Грама Γ системы простых корней $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{R}^n$

$$\Gamma = S^T \Lambda S = (\sqrt{\Lambda} S)^T (\sqrt{\Lambda} S)$$

S - ортогон.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Схема Коксетера $\downarrow$

вершины $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

ребро отсутствует $(m=2)$

ребро простое $(m=3)$

ребро с отметкой m $(m>3)$

$$\Gamma = \left(-\cos\frac{\pi}{m_{ij}}\right)_{i,j=1}^{n}$$

$$\left\langle \sum_i b_i \alpha_i, \sum_j c_j \alpha_j \right\rangle = (b_1 \dots b_n)\, \Gamma \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Следствия полож. опред. Γ:

1) $\langle \lambda, \mu \rangle^2 \le \langle \lambda, \lambda \rangle \langle \mu, \mu \rangle$ (Коши)

2) $\langle \lambda, \lambda \rangle \ge \sum \langle \lambda, \varepsilon_i \rangle^2$ для ортонормированных ε_i (Пифагор)

$\underbrace{\text{Классификация связных схем Коксетера}}_{\text{СК}}$

① G − СК, G' получается из G удалением некоторых вершин, то G' − СК

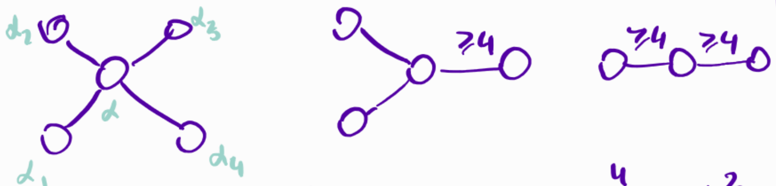
② СК не содержит циклов

$$0 < \langle \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \rangle = n - 2 \sum_{i<j} \underbrace{\cos\frac{\pi}{m_{ij}}}_{\substack{\ge \frac{1}{2} \text{ если ребро есть} \\ =0 \text{ если ребра нет}}} \le n - \#\text{рёбер}$$

$\#$рёбер $< n$

СК − дерево

③ СК не содержит подсхем типов



Простое ребро — ребро без отметки

Особенность — вершина степени 3 либо ребро с отметкой ≥4

$$1 = \langle \alpha, \alpha \rangle^2 > \sum_{i=1}^{4} \langle \alpha, \alpha_i \rangle^2 \ge \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

④ Можно стянуть цепочку простых рёбер

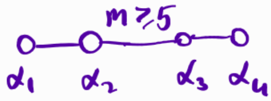
если СК, то и тоже СК

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle = k - (k-1) = 1$$

$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha_1, \beta \rangle$

$\langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \alpha_k, \gamma \rangle$

⑤ СК не может содержать более одной особенности (иначе стянем путь между ними и получим граф из шага ③)

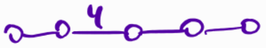
(6)  — не СК

$\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 \qquad \gamma = 2\alpha_4 + \alpha_4$

$\langle \beta,\beta\rangle = \langle \gamma,\gamma\rangle = 3$

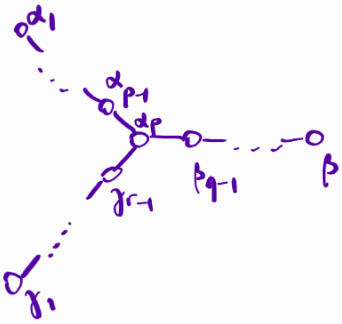
$\langle \beta,\gamma\rangle = -4\cos\frac{\pi}{m} \qquad \cos\frac{\pi}{m} \geq \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt5}{4}$

$9 = \langle \beta,\beta\rangle\langle \gamma,\gamma\rangle \geq \langle \beta,\gamma\rangle^2 \geq (1+\sqrt5)^2 = 6+2\sqrt5 > 9$

(7)  — не СК

(8)  — не СК

(9)  — не СК

(10) 

$\alpha_p = \beta_q = \gamma_r$

$\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (p-1)\alpha_{p-1}$

$\beta = \beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + (q-1)\beta_{q-1}$

$\gamma = \gamma_1 + 2\gamma_2 + \ldots + (r-1)\gamma_{r-1}$

$\langle \alpha,\alpha\rangle = \frac{(p-1)p}{2}$

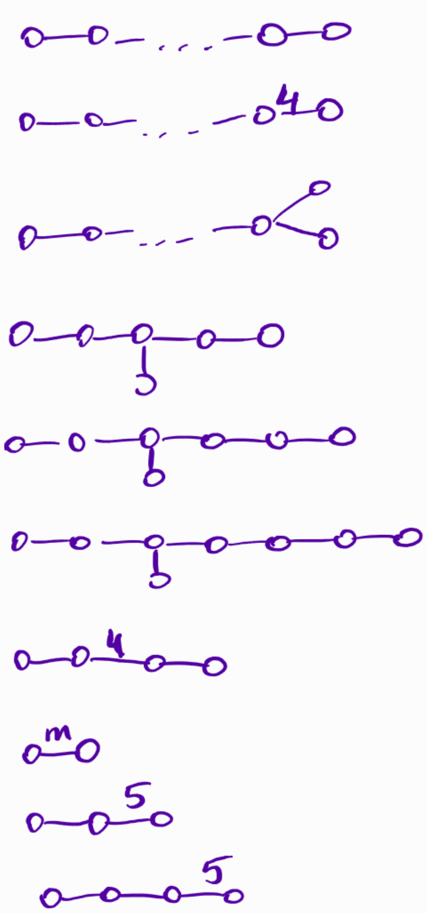
$$1 = \langle \alpha_p,\alpha_p\rangle^2 > \frac{\langle \alpha_p,\alpha\rangle^2}{\langle \alpha,\alpha\rangle} + \frac{\langle \beta_q,\beta\rangle^2}{\langle \beta,\beta\rangle} + \frac{\langle \gamma_r,\gamma\rangle^2}{\langle \gamma,\gamma\rangle} = \frac{p-1}{2p} + \frac{q-1}{2q} + \frac{r-1}{2r} =$$

$$= \frac32 - \frac12\left(\frac1p + \frac1q + \frac1r\right)$$

$$(p,q,r) = (2,2,r),\ (2,3,3),\ (2,3,4),\ (2,3,5) \Longleftarrow \frac1p + \frac1q + \frac1r > 1$$

Теорема (Coxeter, 1934)

Список всевозможных связных схем Кокстера, отвечающих неразложимым конечным группам отражений:



A_n

B_n

D_n

E_6

E_7

E_8

F_4

$G_2^{(m)}$

H_3

H_4

$$\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H} = \{x + yi + zj + tk,\ x,y,z,t \in \mathbb{R}\}$$

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$ij = k,\ jk = i,\ ki = j$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i-j), \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(j-k), \quad \alpha_3 = k, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}(1-i-j-k).$$

— Простые корни F_4

Бинарная группа куба

$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ золотое сечение

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varphi^{-1} - \varphi j - k), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(-\varphi i + \varphi^{-1} j + k),$$
$$\alpha_3 = \frac{1}{2}(\varphi^{-1} i + j - \varphi k), \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}(\varphi^{-1} i - j + \varphi k)$$

— простые корни H_4

Бинарная группа икосаэдра

простые корни H_3

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$$
$$\alpha_2 = e_1 + e_2,$$
$$\alpha_i = e_{i-1} - e_{i-2} \quad (3 \leqslant i \leqslant 8).$$

— простые корни E_8

Решётка E_8 = порождается теми векторами из $\mathbb{Z}^8$ у которых сумма координат чётная

$+ \ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$

Вектора длины 2 в ней — система корней E_8

Замечание для экспертов

$Sp(1)$ — группа единичных кватернионов $(x^2+y^2+z^2+t^2=1)$

$$\begin{tikzcd}
Sp(1) \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \\
SU(2) \arrow[r, "\text{двулистное накрытие}"'] & SO(3) \\
\text{Бин. группа } X \arrow[u] \arrow[r] & Sym^+ X \arrow[u]
\end{tikzcd}$$