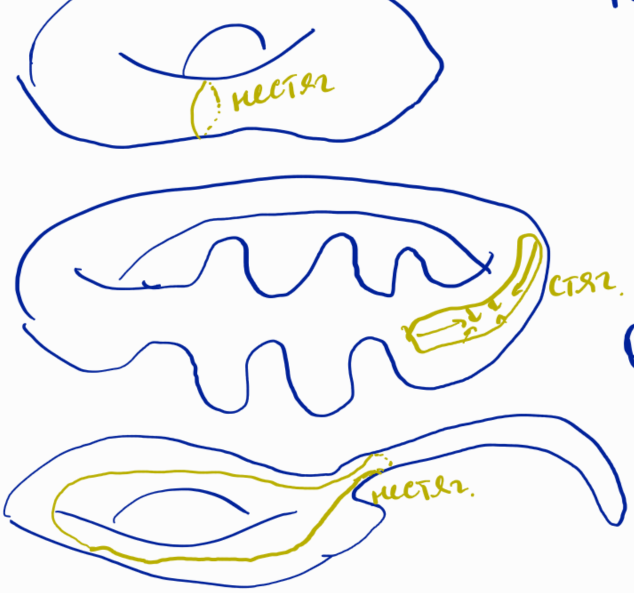
Систолическая геометрия



① Loewner '49:

На любом римановом торе T^2 существует замкнутая нестягиваемая петля длины $\le C\sqrt{\text{Area}\,T^2}$

② Gromov '83

Общее систолическое неравенство

На торе T^n

$\text{sys}\,T^n \le C_n \cdot \sqrt[n]{\text{Vol}\,T^n}$

Опр. Систола — длина кратчайшей нестягиваемой петли на многообразии

На двумерной поверхности Σ^2

$\text{sys}\,\Sigma^2 \le C\sqrt{\text{Area}\,\Sigma^2}$

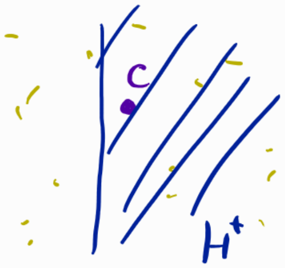
③ Croke '88: на римановой сфере S^2 существует замкнутая геодезическая длины $\le C\sqrt{\text{Area}\,S^2}$

На любой двумерной поверхности Σ^2 $\exists$ замкн. геод. длины $\le C\sqrt{\text{Area}\,\Sigma^2}$

Теорема (Lipton–Tarjan '79) Любой планарный граф $G=(V,E)$ на $|V|=n$ верш. содержит $S\subset V$, $|S|\le 2\sqrt{n}$, размер любой связной компоненты $G\setminus S$ не превосходит $\frac{3n}{4}$

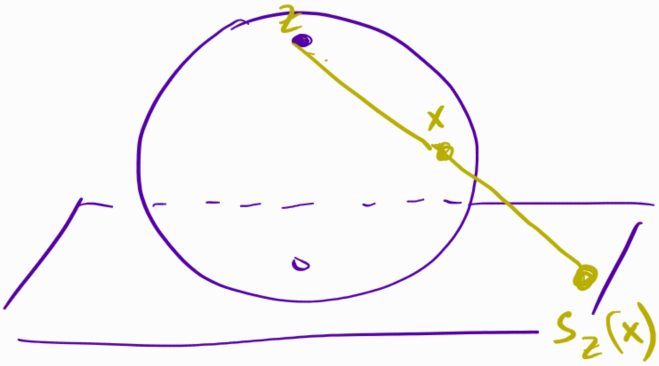
Д-во (Miller–Teng–Thurston–Varasis '97)

Ингредиент 1 Т-ма Радо: любое множество T из n точек в $\mathbb{R}^d$ имеет "медиану": $\exists\, c\in\mathbb{R}^d$ т.ч. любое замкнутое полупростр., содерж. c, содержит $\ge \frac{n}{d+1}$ точек из T



Д-во: применить Хелли для полупространств, содерж. $> \frac{dn}{d+1}$ точек из T

Ингредиент 2 Теорема Кёбе: планарный граф можно реализовать касаниями семейства кругов



Преобразования Мёбиуса

Ингредиент 3: топологический аргумент в стиле Брауэра показывает, что можно добиться того, что центр сферы — — медиана множества центров ср. шапочек

Ингредиент 4 Случайная плоскость H через центр сферы разрежет граф хорошо (S ⟷ те шапочки которые пересекают H)