M — компактное риманово многообразие

Кривая $\gamma : [0,1] \to M$ называется геодезической, если локально минимизирует функционал длины, т.е. для любых достаточно близких $0 \le t < t' \le 1$ отрезок $\gamma|_{[t,t']}$ — кривая кратчайшей длины между $\gamma(t)$ и $\gamma(t')$

Вопрос: существует ли нетривиальная замкнутая геодезическая на M ?

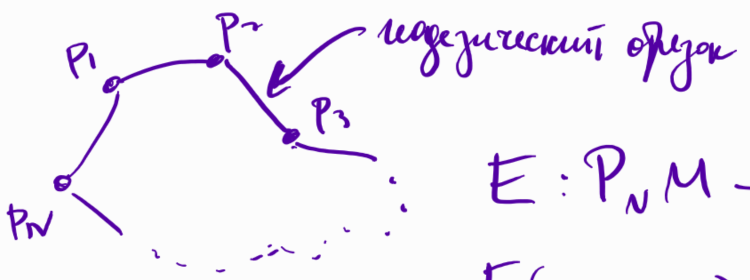
Т-ма (Lyusternik-Fet, 1951) Да

Идея в 2D: M либо (a) неодносвязное (π_1 нетривиальна)
либо (b) односвязное : $M \simeq S^2$

(a) (Cartan—Hadamard) Систола — геодезическая

Лемма Любые достаточно близкие точки $x, y \in M$ всегда можно соединить единственной геодезической

$P_N M$ — пространство геодезических многоугольников на N вершинах



$$\sum_i dist(p_i, p_{i+1})^2 < \varepsilon$$

$$E : P_N M \to \mathbb{R} \qquad (p_{N+1} = p_1)$$

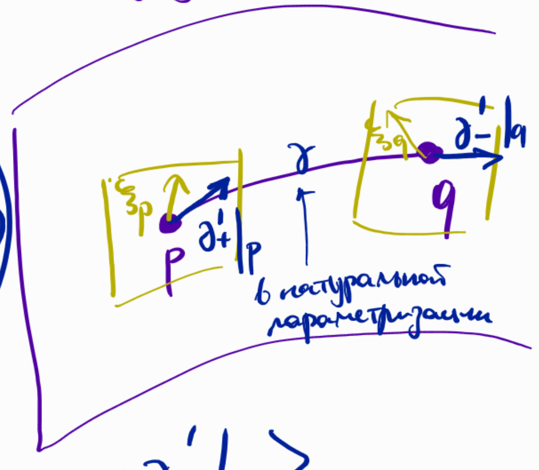
$$E(p_1, \dots, p_N) = \sum_i dist(p_i, p_{i+1})^2$$

гладкая в окрестности $P_N \subset \underbrace{M \times \dots \times M}_{N}$

Лемма Критические точки E — замкнутые геодезические.

$$d\left(dist^2\right)(\xi_p, \xi_q)$$

$$= 2\, dist(p,q) \cdot \left(\langle \gamma'_-|_q, \xi_q \rangle - \langle \gamma'_+|_p, \xi_p \rangle \right)$$



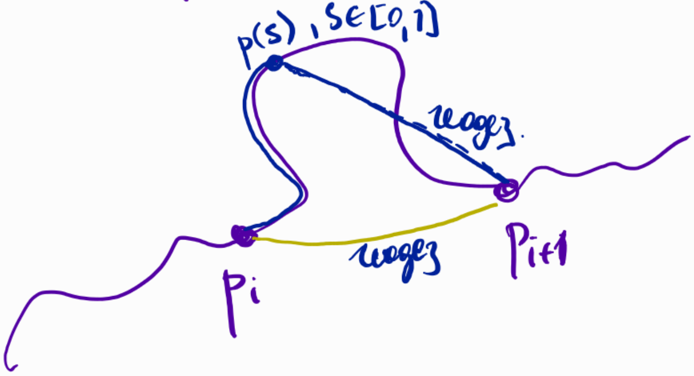
$$dE(\xi_1, \dots, \xi_n) = 2 \sum_i \langle \xi_i, \ len\, \gamma|_{[p_{i-1} p_i]} \cdot \gamma'_-|_{p_i} - len\, \gamma|_{[p_i, p_{i+1}]} \cdot \gamma'_+|_{p_i} \rangle$$

$dE=0 \iff \forall i \quad \mathrm{len}\,\gamma|_{[p_{i-1},p_i]}\cdot \gamma'_-|_{p_i} = \mathrm{len}\,\gamma|_{[p_i,p_{i+1}]}\cdot \gamma'_+|_{p_i}$

$\iff$ многоугольник с равными сторонами и углами π

Д-во (a): берём любую нестягиваемую петлю γ

Для большого N заменим γ на геод. многоугольник $\in P_N M$



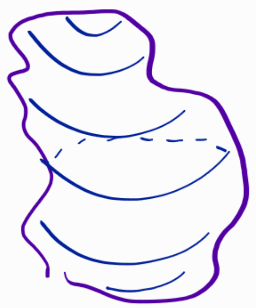
$p_i \xrightarrow{\gamma} p(s) \xrightarrow{\text{геод.}} p_{i+1}$

$s=1$ — отрезок γ

$s=0$ — геод. отрезок

Градиентный спуск вдоль $-\nabla E$ в P_N продеформирует геод. многоугольник в замкн. геодезическую

Т (Birkhoff)



(S^2, g)

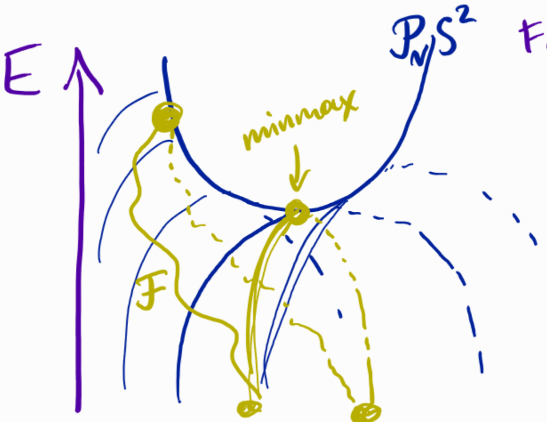
Идея Рассмотреть заметание окружностями и начать их деформировать, уменьшая длину, одновременно

$\mathcal{F}$ — семейство заметаний (S^2,g) окружностями

каждое заметание $F\in\mathcal{F}$ — это $S^2 \xrightarrow[\text{степени 1}]{\text{непрер.}} (S^2,g)$

$\uparrow$ расслоена на окружности

Birkhoff minimax: $\inf\limits_{F\in\mathcal{F}} \max\limits_{\substack{\gamma - \text{окр.}\\ \text{из } F}} \mathrm{len}\,\gamma$ даёт нетрив. замкн. геодезическую



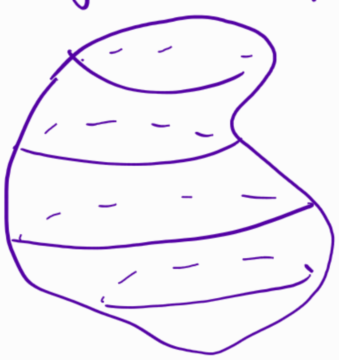
Укорачивание кривых по Биркгофу:

$\gamma: S^1 \to M$ запараметризована длиной дуги, $N \gg 1$ фиксир.

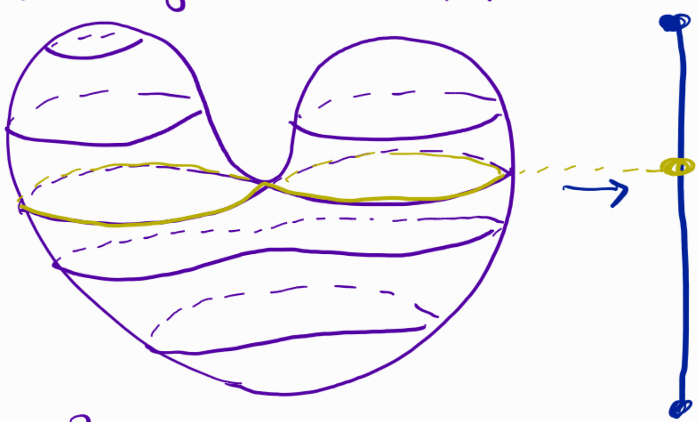
Фаза 1: продеформировать γ в геод. многоугольник γ' на вершинах
$\gamma(0), \gamma(\frac{1}{N}), \gamma(\frac{2}{N}), \ldots, \gamma(\frac{N-1}{N})$

Фаза 2: продеформировать γ' в геод. многоуг. γ'' на вершинах
$\gamma'(\frac{1/2}{N}), \gamma'(\frac{3/2}{N}), \ldots, \gamma'(\frac{N-1/2}{N})$

Простое заметание сферы:



Непростое заметание сферы:



Разрезание сферы:

непр. $p: S^2 \to [0,1]$
так, что прообразы $p^{-1}(y)$ — конечные объединения точек, окружностей, "восьмёрок"

Заметание сферы:

Образ разрезания под действием непрерывного отобр. $f: S^2 \to S^2$ степени 1

разрезана

заметена

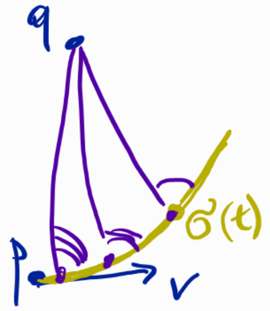
$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "f", "\deg 1"'] \arrow[d, "p"] & S^2 \\ {[0,1]} & \end{tikzcd}$$

заметается слоями $f(p^{-1}(y)), y \in [0,1]$

Факт (Pitts, Calabi, Cao)
Если риманова сфера (S^2, g) заметена слоями длины $\leq L$
то существует нетривиальная замкнутая геодезическая длины $\leq L$

Лемма (Berger) Пусть $p, q \in M$ комп. рим. многообр.,
$\mathrm{dist}(p,q) = \mathrm{diam}\, M$.
Тогда $\forall v \in T_pM$ существует кратчайшая геодезическая γ между p и q такая, что $\langle \gamma'(0), v \rangle \geq 0$

Д-во



$\sigma(0)=p \quad \sigma'(0)=v$

$\sigma:[0,\varepsilon]\to S^2$ геодезическая

Проведём кратч. геод. γ_t из $\sigma(t)$ в q

$\boxed{\text{Случай 1}}$ Найдутся сколь угодно малые t, для которых угол $\angle(\gamma_t'(0), \sigma'(t)) \le \frac{\pi}{2}$

Тогда в пределе (подпоследовательности) $\gamma_t \to$ искомой геодезической

$\boxed{\text{Случай 2}}$ $\forall t \le t_0 \quad \angle(\gamma_t'(0), \sigma'(t)) > \frac{\pi}{2}$

$\langle \gamma_t'(0), \sigma'(t)\rangle < 0$

first variation formula

Дифференцируя $\operatorname{dist}(\sigma(t), q)$ по t, можно показать, что $\operatorname{dist}(\sigma(t),q)$ возрастающая на $[0,t_0]$

— противоречие с тем, что $\operatorname{dist}(\sigma(0),q) = \operatorname{diam} M$

□

Теорема (Croke, 1988) На римановой сфере (S^2, g)

$\boxed{1}$ существует нетрив. замкнутая геодезическая длины $\le C_1 \cdot D$, $D = \operatorname{diam}(S^2, g)$

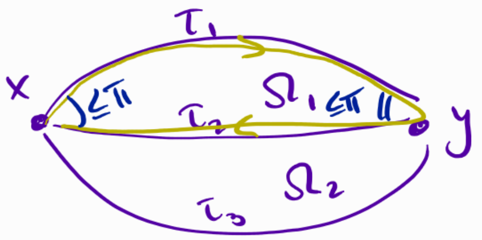
$\boxed{2}$ существует нетрив. замкнутая геодезическая длины $\le C_2\sqrt{A}$, $A = \operatorname{area}(S^2, g)$

Д-во $\boxed{1}$ $x, y \in S^2$, $\operatorname{dist}(x,y) = D$

По лемме Берже $\exists$ геодезические $\tau_1, \dots, \tau_n$ длины D из x в y такие, что углы между ними вокруг точек x и y не превосходят π.

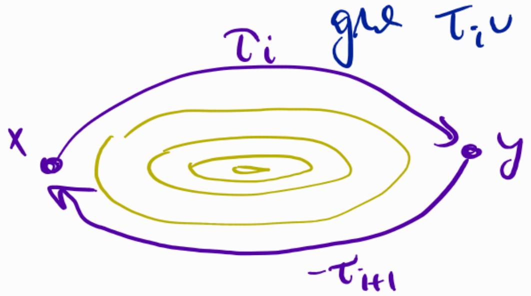
Они разрезают сферу на области Ω_i так что

$\tau_i \cup (-\tau_{i+1})$ выпукла по отношению к Ω_i



<u>Опр.</u> $\gamma = \partial\Omega$ замкнутая несамопересек. кривая (область) выпукла по отнош. к Ω, если $\exists \varepsilon\ \forall p,q \in \overline{\Omega}$ т.ч. $\operatorname{dist}(x,y) \le \varepsilon$, кратчайшая геодезическая из p в q полностью лежит в $\overline{\Omega}$

Либо процесс Биркгофа для $\tau_i \cup (-\tau_{i+1})$



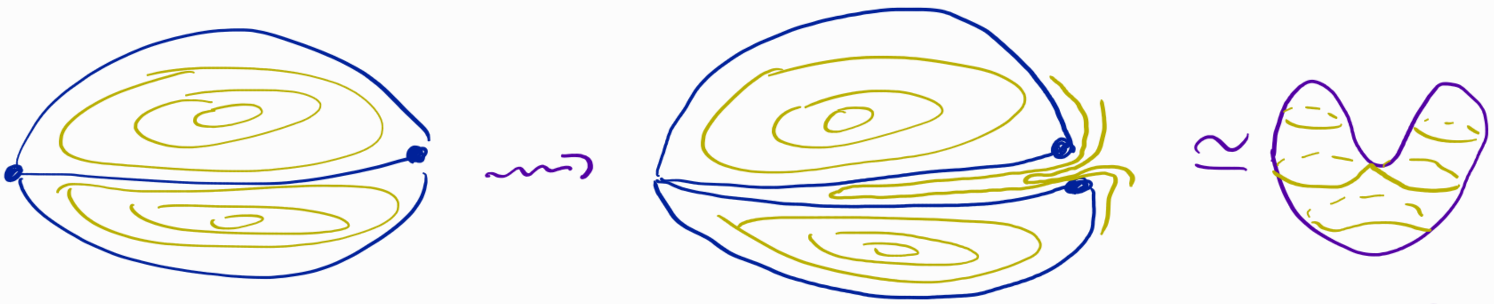
сходится к нетрив. замкн. геодезической длины $\leq 2D$, либо мы построим заметание каждой области Ω_i окружностями длины $\leq 2D$

<u>Свойства</u>: 1) если γ — замкнутая геодезическая, то γ выпукла по отнош. к Ω

2) если γ — геодезический многоугольник, то γ выпукла по отнош. к Ω $\iff$ все углы $\leq \pi$

3) Если γ выпукла по отнош. к Ω, то процесс Биркгофа, примен. к γ, всегда остаётся в $\overline{\Omega}$ (и сходится к замкнутой геодезической)

Объединение заметаний Ω_i можно модифицировать до заметания сферы слоями длины $\leq 6D$



<u>Д-во</u> $\boxed{2}$ $x, y \in S^2$ $\operatorname{dist}(x,y) = D$ $\tau : [0, D] \to S^2$ геодез. из x, y

Если $6D \leq 12\sqrt{A}$, то всё доказано по пункту $\boxed{1}$

Пусть $D > 2\sqrt{A}$

$w = \tau(t)$

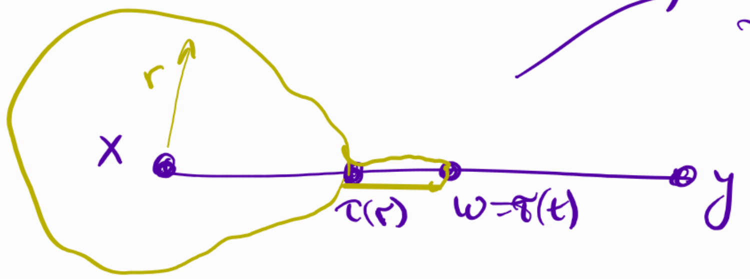
$t \in (\sqrt{A}, D - \sqrt{A})$

$$\int_{t-\sqrt{A}}^{t+\sqrt{A}} \operatorname{len} S_r(x)\, dr \overset{\text{коплощадь}}{\leq} A$$

метрические сферы

$$= \int_{t-\sqrt{A}}^{t-\sqrt{A}} \left(2\sqrt{A} - 2|r-t|\right) dr$$

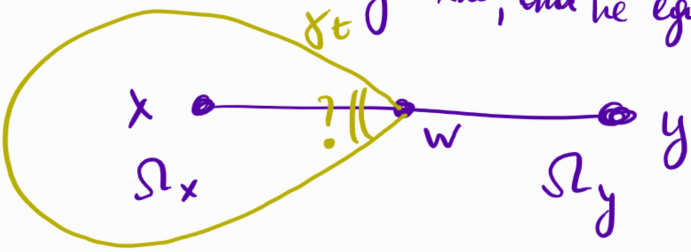
$\Leftarrow$ $\exists r$ и компонента связности $S_r(x)$, проходящая через $\tau(r)$, и длины $\le 2\sqrt{A} - 2|r-t|$



→ построим замкнутую кривую через w, разделяющую x, y, длины $\le 2\sqrt{A}$

Рассмотрим кратчайшую <u>такую</u> замкнутую кривую γ_t (проходит через w, разделяет x, y), её длина $\le 2\sqrt{A}$

γ_t — геодезическая петля (возможно, она не единственна), она выпукла либо к Ω_x либо к Ω_y (в зависимости от угла при w)



Покроем $(\sqrt{A}, D-\sqrt{A})$ множествами L и R:

$t \in L$, если $\exists\, \gamma_t$ выпуклая по отнош. к Ω_x

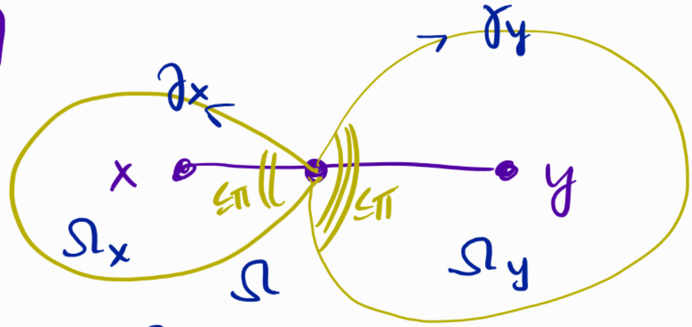
$t \in R$, если $\exists\, \gamma_t$ вып. по отнош к Ω_y

$\boxed{\text{Случай 1}}$ $\exists\, t_0 \in L \cap R$

γ_x, γ_y проходящие через $\tau(t_0)$

→ $\boxed{1.1}$ $\gamma_x = \gamma_y$ — это замкнутая геодез. длины $\le 2\sqrt{A}$

→ $\boxed{1.2}$



γ_x вып. по отнош. к Ω_x

γ_y вып. по отнош. к Ω_y

$\gamma_x \cup (-\gamma_y)$ вып. по отнош. к $\Omega = S^2 \setminus (\overline{\Omega_x} \cup \overline{\Omega_y})$

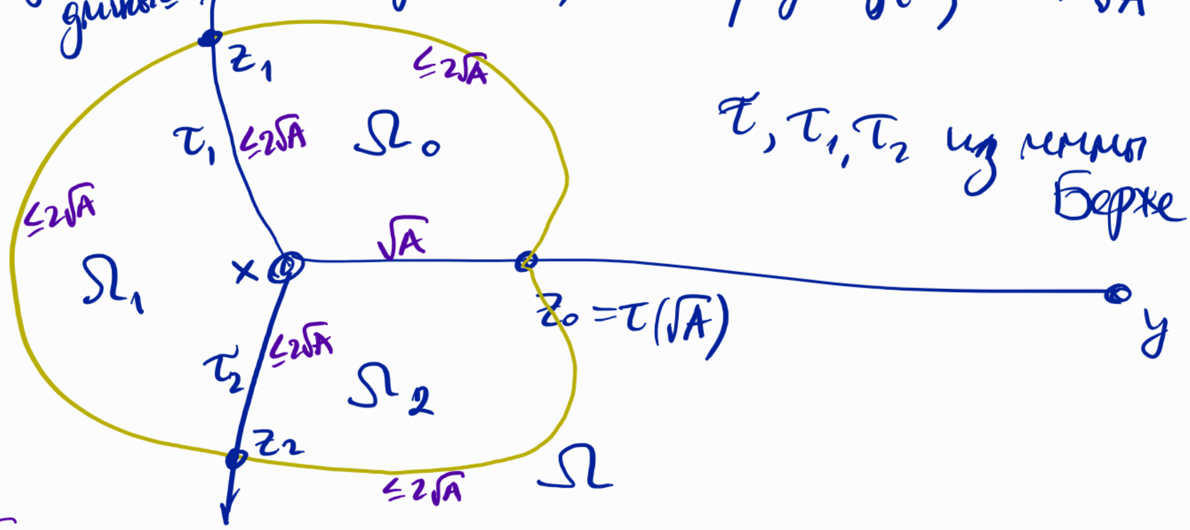
В каждой из $\Omega_x, \Omega_y, \Omega$ применяем процесс Биркгофа.

(и далее как в $\boxed{1}$
$\Rightarrow \exists$ геод. длины $\leq 4\sqrt{A}$)

$\boxed{\text{Случай 2}}$ $L = \varnothing$, $R = (\sqrt{A}, D - \sqrt{A})$

(остальные случаи аналогичны)

Строим геод. петлю γ через $\tau(\sqrt{A})$ как предел γ_t, $t \to \sqrt{A}$
длины $\leq 2\sqrt{A}$



τ, τ_1, τ_2 из леммы Берже

Применяем Биркгофа в областях $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega$

(и далее как в $\boxed{1}$)

$\blacksquare$