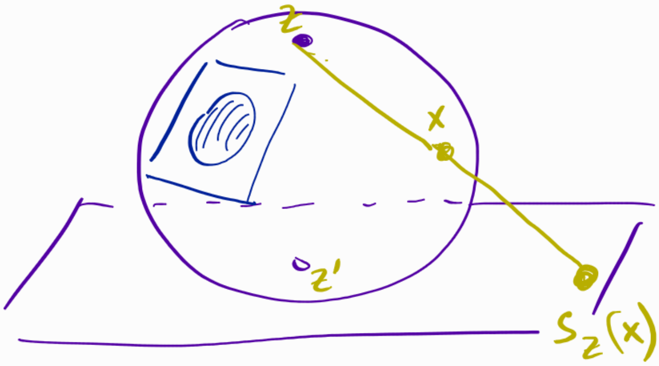
Теорема (Lipton–Tarjan '79) Любой планарный граф $G=(V,E)$ на $|V|=n$ верш. содержит $S\subset V$, $|S|\le 2\sqrt{n}$, размер любой связной компоненты $G\setminus S$ не превосходит $\frac{3n}{4}$

Д-во (Miller—Teng—Thurston—Varasis '97)

Ингредиент 1 Т-ма Радо: любое множество T из n точек в $\mathbb{R}^d$ имеет "медиану": $\exists c\in\mathbb{R}^d$ т.ч. любое замкнутое полупростр., содерж. c, содержит $\ge \frac{n}{d+1}$ точек из T

Ингредиент 2 Теорема Кёбе: планарный граф можно реализовать касаниями семейства кругов



Преобразования Мёбиуса
(сохр. сфер. шапочки и углы)

1) повороты сферы

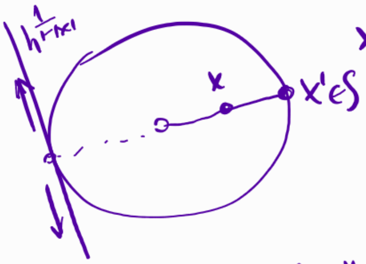
2) $S_z^{-1}\circ h^R_{z'}\circ S_z$

гомотетия плоскости с центром z' и коэфф. R

стерео из z

Ингредиент 3: топологический аргумент в стиле Брауэра показывает, что можно добиться того, что центр сферы — медиана множества центров сф. шапочек

Пусть G реализован на сфере $S=\partial B$ семейством сф. шапочек C_i $(i\in V)$



$x\in \operatorname{int} B \longmapsto \tau_x$ Мёбиуса

$x=$ центр $B \longmapsto \tau_x=id$

$x\ne$ центр $B \longmapsto \tau_x = S_{x'}^{-1}\circ h^{\frac{1}{1-|x|}}\circ S_{x'}$

Арг. a lá "неподв. точка" или "степень отобр." позволяет подобрать $x\in \operatorname{int} B$ так что центр B — медиана множества центров шапочек $\tau_x(C_i)$

Ингредиент 4. Случайная плоскость H через центр сферы разрежет граф хорошо ($S \leftrightarrow$ те шапочки, которые пересекают H)

Имеем семейство шапочек $C_i \subset S$, реализующих G

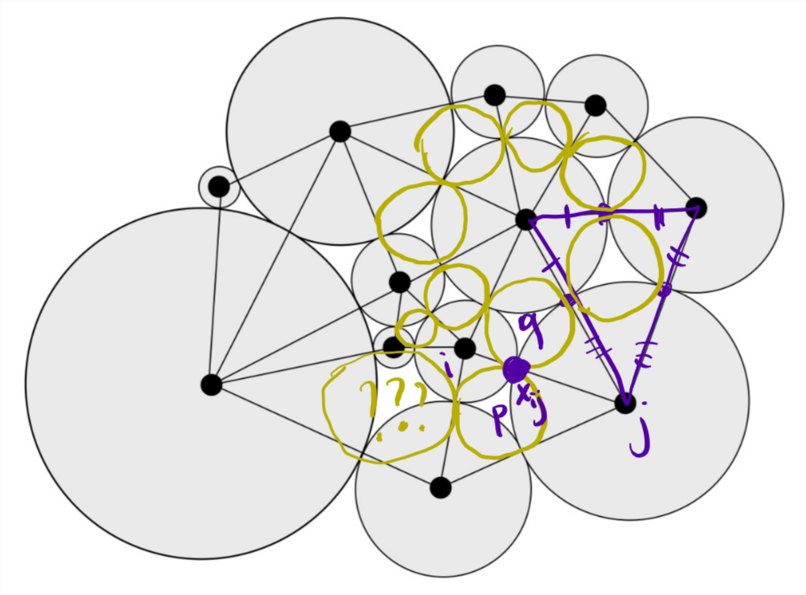
$$\mathrm{Prob}(H \cap C_i \neq \emptyset) = \frac{\text{Area (поясок полуширины } \rho_i)}{\text{Area }(S)} =$$

$$= \frac{4\pi \sin \rho_i}{4\pi} = \sin \rho_i$$

$$\mathbb{E}(\# C_i \text{ перес. } H) = \sum_i \mathrm{Prob}(C_i \text{ перес. } H) =$$

$$= \sum_i \sin \rho_i \le \sqrt{n} \left(\sum_i (\sin \rho_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le 2\sqrt{n} \left(\sum \left(\sin \frac{\rho_i}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{n} \left(\frac{\sum_i \text{Area } C_i}{\text{Area } S} \right)^{\frac{1}{2}} < 2\sqrt{n}$$



Планарный граф $G = (V, E)$

Двойственный граф $G^* = (V^*, E^*)$

Двойное представление кругами:

2 семейства кругов на плоскости

$C_i, \quad i \in V$

$D_p, \quad p \in V^*$ (грани нарисов. графа G)

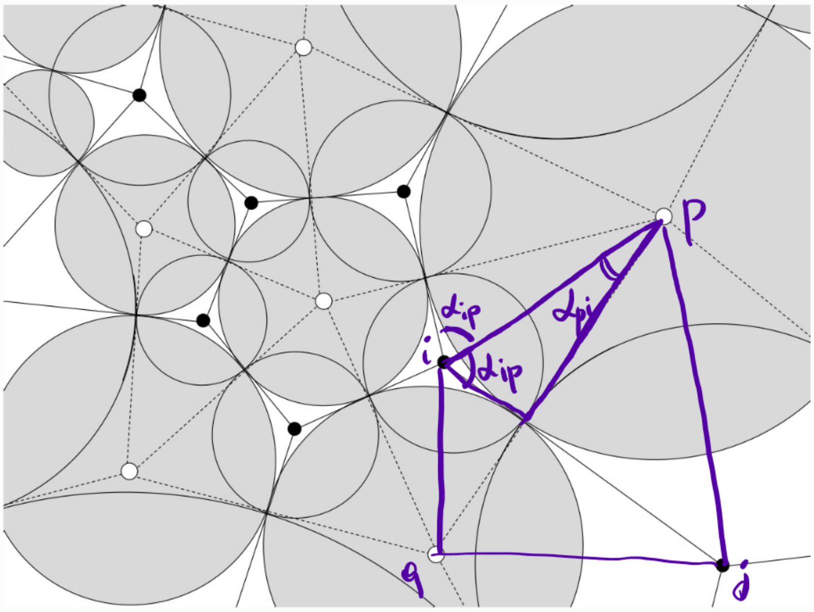
$\forall\ ij \in E \quad C_i$ и C_j касаются в точке x_{ij}

Для соотв. $pq \in E^*$ $\quad D_p$ и D_q касаются в x_{ij}

$C_\bullet$ и $D_\bullet$ ортогональны в x_{ij}

G — 3-связный планарный (1-скелет выпуклого многогранника)

Теорема (Koebe '36) Любой 3-связный планарный граф G допускает двойное представление кругами



$U = V \cup (V^* \setminus p_{\text{внеш}})$

$J = \{ip \mid i \in V,\ p \in V^* \setminus p_{\text{внеш}}\}$

$u \in U \longmapsto r_u > 0$

$\alpha_{ip} = \operatorname{arctg} \frac{r_p}{r_i}, \quad \alpha_{pi} = \operatorname{arctg} \frac{r_i}{r_p}$

$$\forall i \in V \quad \sum_{p \text{ см. } i} \alpha_{ip} = \begin{cases} \pi, & i \text{ внутр.} \\ ?, & i \text{ внеш.} \end{cases}$$

$$\forall p \in V^* \setminus p_{\text{внеш}} \quad \sum_{i \in V(p)} \alpha_{pi} = \pi$$

Theorem. *Among all curves of a given length, the circle encloses the greatest area.*

Proof. For any curve that is not a circle, there is a method (given by Steiner) by which one finds a curve that encloses greater area. Therefore the circle has the greatest area. ■

Theorem. *Among all positive integers, the integer 1 is the largest.*

Proof. For any integer that is not 1, there is a method (to take the square) by which one finds a larger positive integer. Therefore 1 is the largest integer. ■