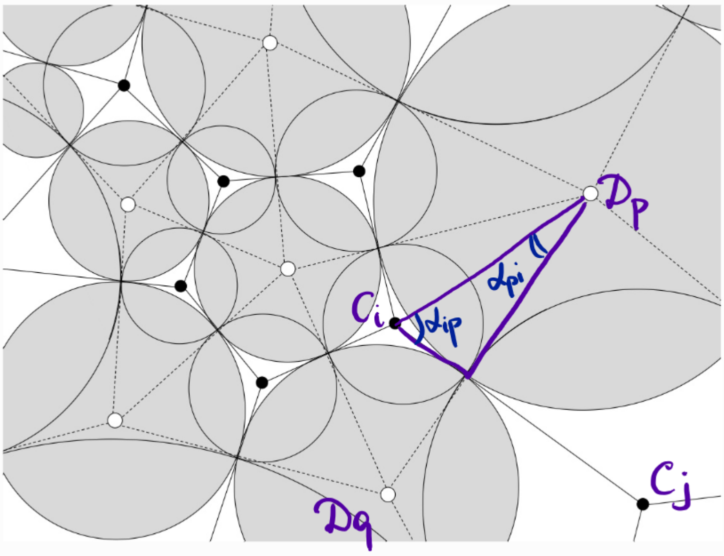


Т-ма Кёбе: планарный трёхсвязный граф можно представить двумя семействами кругов

$\forall i \in V \quad r_i > 0$

$\forall p \in V^* \setminus p_{внеш} \quad r_p > 0$

$\alpha_{ip} = \operatorname{arctg} \frac{r_p}{r_i}, \quad \alpha_{pi} = \frac{\pi}{2} - \alpha_{ip} = \operatorname{arctg} \frac{r_i}{r_p}$

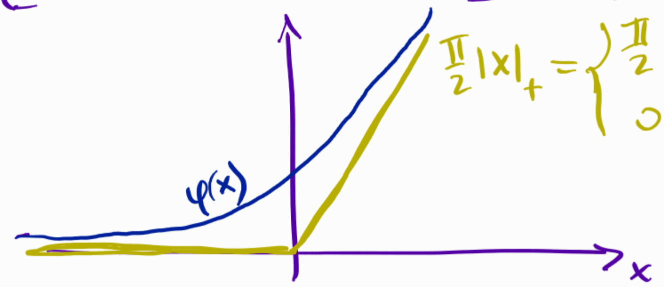
$$\forall p \in V^* \setminus p_{внеш} \quad \sum_{i \text{ см. с } p} \alpha_{pi} = \pi$$

$$\forall i \in V \quad \sum_{p \text{ см. с } i} \alpha_{ip} = \begin{cases} \pi & i \notin \{a,b,c\} \\ \frac{\pi}{6} & i \in \{a,b,c\} \end{cases}$$

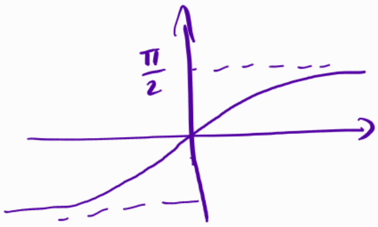
WLOG в G есть треугольная грань (иначе $G \leftrightarrow G^*$) $p = \{abc\} = p_{внеш}$

$\exists$ углы $\beta_{ip}, \beta_{pi} = \frac{\pi}{2} - \beta_{ip} \in (0, \frac{\pi}{2})$ удовлетв. тем соотношениям

[Colin de Verdière '91] $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \operatorname{arctg} e^t \, dt$ → возрастает → выпуклая → $\varphi(x) > \frac{\pi}{2}|x|_+$



$\frac{\pi}{2}|x|_+ = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$



$$\int_0^x \operatorname{arctg} e^{-t} dt + \int_0^x \operatorname{arctg} e^{t} dt = \int_{-x}^{0} + \int_0^x = \int_{-x}^{x} \operatorname{arctg} e^t \, dt = \frac{\pi}{2} x$$

$$\int_0^x \frac{\pi}{2} dt$$

$U = V \cup (V^* \setminus p_{внеш})$

$J = \{ip \mid i \in V, p \in V^* \setminus p_{внеш}\}$

$$\Phi : \mathbb{R}^U \to \mathbb{R}$$

$$\Phi(x) = \sum_{ip \in J} \left(\varphi(x_p - x_i) - \beta_{ip}(x_p - x_i) \right)$$ выпуклая

Зафиксируем $x_a = 0$

$$\Phi(x) = \sum_{ip \in J} \left(\varphi(x_p - x_i) - \beta_{ip}(x_p - x_i) \right) \geq \sum_{ip \in J} \left(\frac{\pi}{2} |x_p - x_i|_+ - \beta_{ip} \left(|x_p - x_i|_+ - |x_p - x_i|_- \right) \right)$$

$$= \sum_{ip \in J} \left(\beta_{pi} |x_p - x_i|_+ + \beta_{ip} |x_p - x_i|_- \right) \geq \sum_{ip \in J} \min(\beta_{pi}, \beta_{ip}) \cdot |x_p - x_i|$$

$|t|_- = \begin{cases} |t|, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}$

$x_a = 0$, остальные $x \to \infty \implies \Phi(x) \to \infty$

$\exists \min \Phi(x)$ достиг. в точке $y \in \mathbb{R}^V$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_u}(u) = 0$

$r_i = e^{y_i}$ $\quad \alpha_{ip} = \operatorname{arctg} \frac{r_p}{r_i} = \operatorname{arctg} e^{y_p - y_i}$

$\alpha_{pi} = \frac{\pi}{2} - \alpha_{ip} = \operatorname{arctg} e^{y_i - y_p}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(y) = -\sum_{p \text{ см. } i} \varphi'(y_p - y_i) + \sum_{p \text{ см. } i} \beta_{ip} = -\sum_p \operatorname{arctg} e^{y_p - y_i} + \sum \beta_{ip} = 0$$

$$\forall i \in V \quad \sum_{p \text{ см. } i} \alpha_{ip} = \sum_p \operatorname{arctg} e^{y_p - y_i} = \sum_p \beta_{ip} = \begin{cases} \pi, & i \notin \{a, b, c\} \\ \pi/6, & i \in \{a, b, c\} \end{cases}$$

Аналогично, диффер. по x_p, получим $\forall p \neq p_{\text{внеш}}$ $\sum_{i \text{ см. } p} \alpha_{pi} = \pi$ $\square$

Приложения теоремы Кёбе

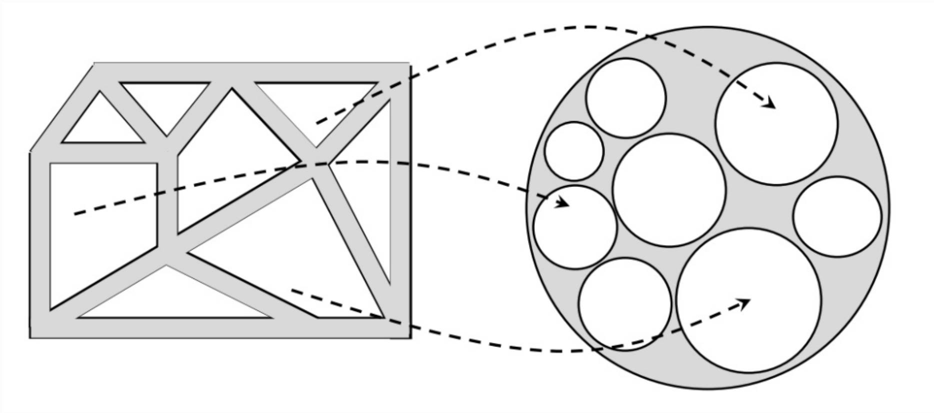
① Планарные графы — плохие экспандеры $\longrightarrow$ теорема Липтона – Тарьяна

$\longrightarrow$ оценка на спектральный зазор лапласиана

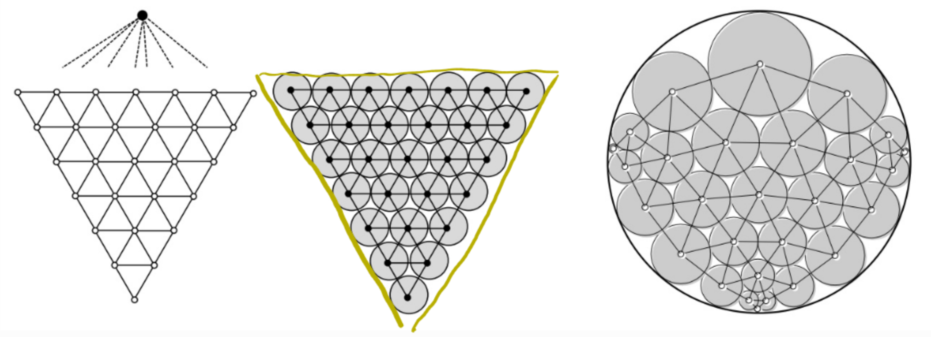
② Многогранники в гиперболическом 3D

Граф $\left(V \cup V^*, \{ip \mid \underset{\text{смежные}}{\,} \; {}^{i \in V}_{p \in V^*} \}\right)$ можно реализовать как трёхмерный гиперболический многогранник с беск. удалёнными вершинами и двугранными углами $= \pi/2$

③ Ещё одна теорема Кёбе: любая связная открытая область на сфере, у которой граница — конечное число связных компонент, конформно эквивалентна $S^2 \setminus$ конечное число сферич. шапочек и точек



Конформная теорема Кёбе "$\Longrightarrow$" графовую



Графовая теорема
Кёбе "$\Rightarrow$" конформную