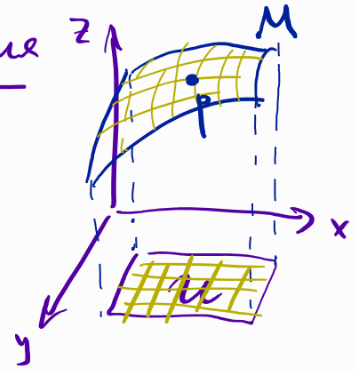
Мотивация



$\varphi : \underset{\mathbb{R}^2}{\overset{}{U}} \to \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$ $\qquad \varphi(x,y) = (x, y, f(x,y))$

$f : U \to \mathbb{R}$ гладкая

$p = (x_0, y_0, f(x_0,y_0)) \in M$

$$\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$$ касательный вектор $\frac{\partial}{\partial x}$ в точке p к M

$$\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = \frac{\partial}{\partial y}$$ в точке p к M

единичная нормаль к M в точке p

$$n_p = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

Касательная плоскость T_pM = плоскость параллельная $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right), \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$

Кривая $\gamma : [a,b] \to M \subset \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))) \qquad \dot\gamma(t) = \left(\dot x(t), \dot y(t), \frac{\partial f}{\partial x}\dot x + \frac{\partial f}{\partial y}\dot y\right) \in T_pM$$

гладкие и $\dot x^2 + \dot y^2 \neq 0$

Длина кривой γ: $\operatorname{len}\gamma = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\dot x + \frac{\partial f}{\partial y}\dot y\right)^2}\,dt$

Площадь поверхности M: $\operatorname{area} M = \iint_U \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$

являются частными случаями **меры Хаусдорфа**

$$\mathcal{H}_d(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \sum (\operatorname{diam} C_i)^d \;\middle|\; \begin{array}{l} \operatorname{diam} C_i < \varepsilon \\ C_i \text{ замкнутые} \\ X \subset \bigcup_i C_i \end{array} \right\}$$

Можно проверить, что $\operatorname{len}\gamma = \mathcal{H}_1(\gamma)$, $\operatorname{area} M = \frac{\pi}{4}\mathcal{H}_2(M)$

Более общо, $\operatorname{vol}_d(X) = \frac{\omega_d}{2^d} \cdot \mathcal{H}_d(X)$ $\quad \Big|$ ω_d – объём единичного d-мерного евклидова шара

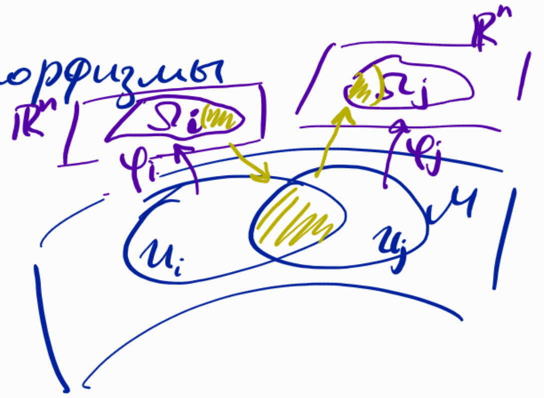
Многообразие M^n: хаусдорфово топологическое пространство, локально гомеоморфное $\mathbb{R}^n$

Гладкое многообразие: на M^n выбран гладкий атлас

$$M = \bigcup_i U_i \quad \text{открытое покрытие}$$

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow \Omega_i \subset \mathbb{R}^n \quad \text{гомеоморфизмы}$$

$$\underbrace{\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}}_{\text{гладкие отображения}} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$



Гладкая кривая $\gamma \subset M$: $\quad \gamma : [a,b] \longrightarrow M$

$\forall t \in [a,b]$
есть карта (U, φ)
т.ч. $\gamma(t) \in U$

$$\begin{tikzcd}
(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[rr, bend left, "\text{гладкое}"] & U \arrow[r, "\varphi"] & \Omega \subset \mathbb{R}^n \\
& M \arrow[u, phantom, "\cap"] &
\end{tikzcd}$$

$$\varphi \circ \gamma : (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{гладкое}$$

Касательный вектор в точке $p \in M$ к M: класс эквивалентности кривых $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$, $\gamma(0) = p$

$p \in U$, карта (U, φ) | относительно отношения эквивалентности $\gamma_1 \sim \gamma_2$, если $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$

Касательное пространство T_pM: все касат. вектора в точке p к M
они образуют n-мерное вект. пр-во

$f : M \longrightarrow N$ гладкое, если

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$$
гладкое

$$\begin{tikzcd}
\Omega_U \arrow[rr, bend left, dashed, "\text{гладкое}"] & & \Omega_V \\
p \in U \arrow[u, "\varphi"] \arrow[rr, "f"] & & V \ni f(p) \arrow[u, "\psi"] \\
M \arrow[u, phantom, "\cap"] & & N \arrow[u, phantom, "\cap"]
\end{tikzcd}$$

Гладкое $f : M \to N$ индуцирует линейные отображения

$$df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$$

Риманова метрика на гладком многообразии M^n: семейство положительно определённых квадратичных форм $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, гладко зависящее от $p \in M$

(их матричные коэфф. гладко зависят от p в любой коорд. карте)

$$\underset{\substack{\cap \\ M}}{U} \xrightarrow{\varphi} \Omega \subset \mathbb{R}^n \qquad \varphi = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \right\}_{i=1}^n \text{ — базис в } T_pM$$

$$g_p(u,v) = g_p\left(\sum_i u^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_j v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \qquad u, v \in T_pM$$

$$= \sum_{i,j} \underbrace{g_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)}_{} \cdot u^i v^j$$

матричный коэфф. $g_{p,ij}$, гладко зависит от p

Длина кривой $\gamma : [a,b] \to \underset{\substack{\cap \\ M}}{U}$

$$\operatorname{len} \gamma = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}\, dt$$

Объём области U:

$$\varphi : U \to \Omega \subset \mathbb{R}^n \qquad \operatorname{vol} U = \int_\Omega \sqrt{\det g_{\varphi^{-1}(x)}}\, dx_1 \dots dx_n$$

Интеграл (борелевской) функции $h : \underset{\substack{\cap \\ M}}{U} \to \mathbb{R}$

$$\int_U h = \int_\Omega h \circ \varphi^{-1}(x) \sqrt{\det g_{\varphi^{-1}(x)}}\, dx_1 \dots dx_n$$

Риманово многообразие (M^n, g) — гладкое многообразие M^n с римановой метрикой g