Формула площади

$f: M^n \to N^n$ $\qquad$ $h: M \to \mathbb{R}$

$$\int_{p\in M} h(p)\,|\mathrm{Jac}_p f| = \int_{q\in N} \sum_{p\in f^{-1}(q)} h(p)$$

Якобиан $f: M^n \to N^n$
выбираем ортонормир. базисы в T_pM, $T_{f(p)}N$
$\mathrm{Jac}_p f = \det df_p$

Следствие: $\displaystyle\int_{p\in A} |\mathrm{Jac}_p f| \geq \mathrm{vol}\, f(A)$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$h: U \to \mathbb{R}$ обл. св-вом (X), $U \xrightarrow{\phi} \Omega$, $U \subset M$

если $h\circ\phi^{-1}: \Omega \to \mathbb{R}$ обл. св-вом (X), $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Формула коплощади

$u: M \to \mathbb{R}$ борелевская
$h: M \to \mathbb{R}$ липшицева
Почти в любой точке $p \in M$ определён

$$dh_p : T_pM \to T_{h(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$\int_{p\in M} u(p)\cdot|dh_p| = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\int_{p\in h^{-1}(x)} u(p)\right)$$

интеграл по $(n-1)$-мерной форме объёма на римановом многообразии $h^{-1}(x)$

Следствие: если $h: M \to \mathbb{R}$ 1-липшицева,
то $\displaystyle \mathrm{vol}_n A \geq \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{vol}_{n-1}(A \cap h^{-1}(x))\,dx$

$h: M \to \mathbb{R}$ назыв. L-липшицевой, если
$\forall x,y \in M$ $\qquad |h(x)-h(y)| \leq L\cdot \mathrm{dist}(x,y)$

$\mathrm{dist}(x,y) = \inf\{\mathrm{len}\,\gamma \mid \gamma: [0,1]\to M$ гладкая или кус. гладкая или липшицева, $\gamma(0)=x,\ \gamma(1)=y\}$

$$\mathrm{len}\,\gamma = \int_0^1 |\dot\gamma(t)|\,dt = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}\,dt$$

Определение

Пусть (M^n, g) — риманово многообразие

Систола многообразия M^n — инфинум длин нестягиваемых (липшицевых) петель на M^n

γ — липшицева, если $\forall t \in [0,1]$ $\exists \varepsilon$

$$(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{U} \subset M, \quad \mathcal{U} \xrightarrow{\varphi} \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

$\varphi \circ \gamma$ — липшицево отобр. из $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ в $\mathbb{R}^n$

$\gamma : [0,1] \to M$ петля, если $\gamma(0) = \gamma(1)$

γ назыв. стягиваемой, если $\exists$ непрерывная деформация γ в точку, то есть

$\exists\ H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow M$ непрерывное

$H(t, 0) = \gamma(t)$

$H(t, 1) =$ какая-то точка $\in M$

$$\mathrm{sys}(M, g) = \inf_{\substack{\gamma \text{ липш.,} \\ \text{нестяг.} \\ \text{петля в } M}} \operatorname{len} \gamma$$

n-мерный топологический тор

$T^n = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1 = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$

Теорема (Loewner '49) Для любой римановой метрики g на T^2 выполнено

$$\left(\mathrm{sys}(T^2, g)\right)^2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{vol}(T^2, g)$$

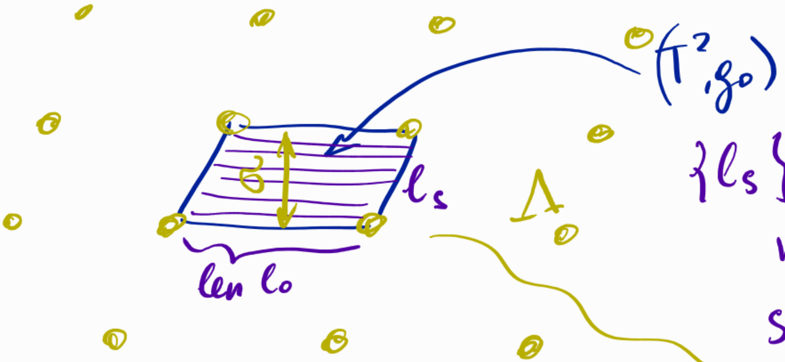
Д-во (по модулю униформизации)

по Т-ме об униформизации

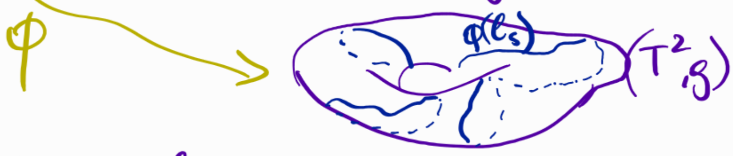
$\exists\ \varphi : \underbrace{(T^2, g_0)}_{\text{плоский тор, т.е. } (T^2, g_0) \simeq \mathbb{R}^2 / \underset{\text{решётка}}{\Lambda}} \longrightarrow (T^2, g)$ с конформным фактором f

$f : T^2 \to \mathbb{R}$

Можно считать, что $\mathrm{vol}(T^2, g_0) = \mathrm{vol}(T^2, g)$ (после домножения f на число)



$\{l_s\}$ – семейство параллельных кривых, параметризованных $s \in$ окружности длины σ



$$\mathrm{vol}(T^2, g_0) = (\mathrm{len}\, l_0) \cdot \sigma \qquad \varphi$$

$$\mathrm{vol}(T^2, g) = \int_{(T^2, g_0)} |\mathrm{Jac}\, \varphi| = \int_{(T^2, g_0)} f^2 = \int_{S^1(\sigma)} ds \int_{l_s} f^2\, dt \geq$$

$$\geq \int_{S^1(\sigma)} ds \frac{\left(\int_{l_s} f\, dt\right)^2}{\mathrm{len}\, l_0} = \frac{1}{\mathrm{len}\, l_0} \int_{S^1(\sigma)} ds \left(\mathrm{len}\, \varphi(l_s)\right)^2$$

$\exists\, s$ такое, что $\mathrm{vol}(T^2, g) \geq \frac{\sigma}{\mathrm{len}\, l_0} \cdot \left(\mathrm{len}\, \varphi(l_s)\right)^2$

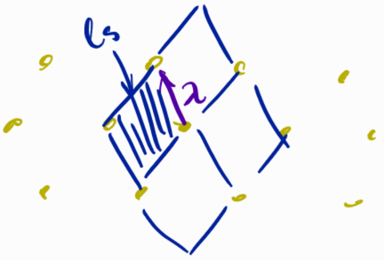
$\exists$ нестягиваемая петля $\varphi(l_s)$ длины $\leq \sqrt{\frac{\mathrm{len}\, l_0}{\sigma} \cdot \mathrm{vol}(T^2, g)}$

$$= \sqrt{\frac{\mathrm{len}\, l_0}{\sigma} \mathrm{vol}(T^2, g_0)} = \sqrt{\frac{\mathrm{len}\, l_0}{\sigma} \cdot \mathrm{len}\, l_0 \cdot \sigma} = \mathrm{len}\, l_0$$

$\Longrightarrow$ задача сводится к случаю плоского тора

$(T^2, g_0) \simeq \mathbb{R}^2 / \Lambda$ $\quad$ Λ решётка

выбор удачного заметания $\{l_s\}$:



$$\mathrm{sys}(T^2, g_0) = \min \left\{ |\lambda| \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda \neq 0 \\ \lambda \in \Lambda \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{vol}(T^2, g_0) = \det \Lambda$$

площадь фунд. параллелограмма $= \det \Lambda \geq \frac{\sqrt{3}}{2} |\lambda|^2$

$\mu + \mathbb{Z}\langle\lambda\rangle \cap B(0, |\lambda|) = \varnothing$