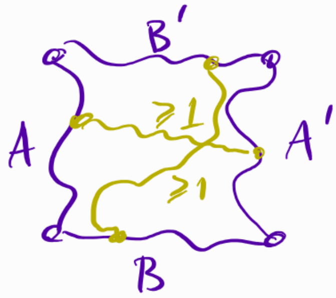
Теорема (Besicovitch, 1952)

g - риманова метрика на квадрате такая, что g-расстояние между любыми противоположными сторонами ≥ 1



$$\operatorname{dist}(A,A') = \inf_{\substack{a\in A\\ a'\in A'}} \operatorname{dist}(a,a') \geq 1$$

$$\operatorname{dist}(B,B') \geq 1$$

Тогда $\operatorname{vol}_2(\square, g) \geq 1/2$

Д-во $f_A(x) = \operatorname{dist}(x,A) = \inf\limits_{a\in A} \operatorname{dist}(x,a)$

$f_A : (\square, g) \to \mathbb{R}$ 1-липшицева

$\bar f_A(x) = \min(1, f_A(x))$ $\quad \bar f_A : (\square, g) \to [0,1]$ 1-липшиц

$\bar f_B(x) = \min(1, f_B(x)) = \min(1, \operatorname{dist}(x,B))$

$F : (\square, g) \longrightarrow [0,1]^2 \qquad F(x) = (\bar f_A(x), \bar f_B(x))$

1) Каждая из сторон $\square$ переходит в соотв. сторону $[0,1]^2$ под действием F

$x\in A \Rightarrow \operatorname{dist}(x,A) = 0 \Rightarrow \bar f_A(x) = 0 \Rightarrow F(x) \in \{0\}\times[0,1]$

$x\in A' \Rightarrow \operatorname{dist}(x,A) \geq 1 \Rightarrow \bar f_A(x) = 1 \Rightarrow F(x) \in \{1\}\times[0,1]$

аналогично $x\in B$, $x \in B'$. ....

2) Степень отображения — "алгебраическое число прообразов у общей точки"

$\deg F = 1$ потому что

$\deg F|_{\partial\square} = 1 \Longrightarrow F$ сюръективно

3) F — $\sqrt{2}$ - липшицево — можно показать, что 1-лип.

$$\operatorname{dist}(F(x),F(y))^2 = (\bar f_A(y) - \bar f_A(x))^2 + (\bar f_B(y) - \bar f_B(x))^2 \leq$$

станд. метр. на $[0,1]^2$

$$\leq \Big(\underbrace{\operatorname{dist}_g(y,A) - \operatorname{dist}_g(x,A)}_{\leq \operatorname{dist}(x,y)}\Big)^2 + \big(\operatorname{dist}_g(y,B) - \operatorname{dist}_g(x,B)\big)^2$$

$$\leq \operatorname{dist}_g(x,y)^2 + \operatorname{dist}_g(x,y)^2 = 2\operatorname{dist}_g(x,y)^2$$

$$\mathrm{dist}(F(x), F(y)) \le \sqrt{2}\, \mathrm{dist}_g(x,y)$$

По ф-ле площади:

$$1 = \mathrm{vol}_2([0,1]^2, \text{ст. метр}) = \mathrm{vol}_2(F(\square), \text{ст. метр}) \le \int_{(\square,g)} |\mathrm{Jac}\, F| \le$$

$$\le \int_{(\square,g)} 2 = 2\, \mathrm{vol}_2(\square, g)$$

Приложение Сепараторы двумерной сферы

(S^2, g) риманова двумерная сфера

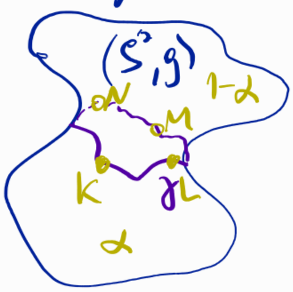
Сепаратором (S^2, g) назовём петлю $\gamma : [0,1] \to S^2$ которая делит S^2 на области площадей $\le \frac{3}{4} A$

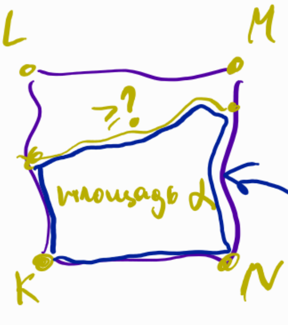
$A = \mathrm{vol}_2(S^2, g)$

Теорема $\exists$ сепаратор длины $\le 2\sqrt{6A}$

Д-во WLOG $A=1$.

Выберем кратчайший (???) сепаратор γ длины $\mathrm{len}\,\gamma = \ell$ делящий сферу на области с площадями $\frac{1}{2} \le \alpha \le \frac{3}{4}$ и $\frac{1}{4} \le 1-\alpha \le \frac{1}{2}$





Если есть короткий путь от KL до MN длины $< \ell/4$

γ' ограничивает площадь от $\frac{\alpha}{2}$ до α

$\frac{1}{4} \le \frac{\alpha}{2}$, $\alpha \le \frac{3}{4}$

K, L, M, N делят γ на 4 куска равной длины

$$\mathrm{len}\,\gamma' < \frac{3}{4}\ell + \frac{\ell}{4} = \ell$$

γ' — сепаратор короче, чем γ

Значит, $\mathrm{dist}(KL, MN) \ge \ell/4$, $\mathrm{dist}(LM, KN) \ge \ell/4$

и по неравенству Безиковича $\frac{3}{4} \ge \alpha \ge \frac{1}{2} \frac{\ell^2}{16} \Rightarrow \ell \le \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$