X – компактное метрическое пространство

$\text{dist}: X \times X \to \mathbb{R}$

- $\text{dist}(x,y) = \text{dist}(y,x)$
- $\text{dist}(x,y) \geq 0$ & $(\text{dist}(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y)$
- $\text{dist}(x,z) \leq \text{dist}(x,y) + \text{dist}(y,z)$

- Из любого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие
- Или, эквивалентно, из любой последовательности можно выделить сходящуюся

I] Опр. (Размерность Лебега)

$\dim X \leq n$ если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ открытое покрытие $X = \bigcup_i U_i$ кратности $\leq n+1$ (т.е. никакая точка $x \in X$ не лежит в $n+2$ множествах покрытия)

т.ч. $\text{diam}\, U_i \leq \varepsilon$ $\forall i$

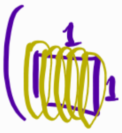
$$\left(\text{diam}\, U_i = \sup_{x,y \in U_i} \text{dist}(x,y)\right)$$

II] Опр (Поперечник Урысона)

$UW_n(X) \leq w$ если $\exists$ открытое покрытие $X = \bigcup_i U_i$

Urysohn width

кратности $\leq n+1$, т.ч. $\text{diam}\, U_i \leq w$

пример: $UW_1\Big($  $\Big) = 1$

Фундаментальная группа линейно-связного пр-ва X

↳ $\forall x,y \in X$ можно соединить (непрерывной) кривой $\gamma \subset X$.

Опр Фунд. группа $\pi_1(X,*)$:
($*$ – выделенная точка X)

① Элементы: $\dfrac{\text{(непрерывные) петли } \gamma: [0,1] \to X, \ \gamma(0)=\gamma(1)=*}{\text{отнош. эквив. } \sim \text{ (гомотопия)}}$

$\gamma \sim \gamma'$ гомотопны, если $\exists$ непрер. $H: [0,1] \times [0,1] \to X$

$H|_{[0,1]\times\{0\}} = \gamma$ $\quad H|_{[0,1]\times\{1\}} = \gamma'$

$H(0,t) = H(1,t) = *$ $\forall t$

② Групповая операция — конкатенация петель

Замечание: π_1 не зависит от $*$, поэтому пишем просто $\pi_1(X)$

Непрерывное отображение $f: X \to Y$ индуцирует гомоморфизм

$$f_*: \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$$

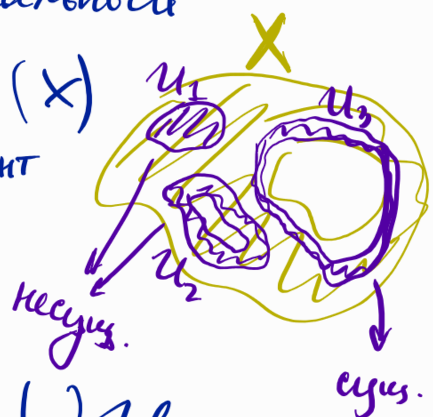
Пример: $\pi_1(S^1) = \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{*\}) = \mathbb{Z}$

Опр ① Открытое множество $U \subset X$ несущественное,

если $\overset{\text{включение}}{i}: U \hookrightarrow X$ индуцирует тривиальный

гомоморфизм $i_*: \pi_1(U) \to \pi_1(X)$

$i_*([\gamma]) =$ нейтр. элемент $\pi_1(X)$



② Пространство X n-существенное, если

не существует открытого покрытия $X = \bigcup_i U_i$

кратности $\leq n$, т.ч. U_i — несущественные $\forall i$

Лемма (Gromov '83) M — n-мерное n-существенное компактное риманово многообразие

Тогда $\underline{sys(M)} \leq 2\, UW_{n-1}(M)$

$sys\, M = \inf\{ len\, \gamma \mid [\gamma] \neq 0 \text{ в } \pi_1(M)\}$

D-во Предположим противное: $UW_{n-1}(M) < w < \frac{sys(M)}{2}$

Рассмотрим открытое покрытие $M = \bigcup_i U_i$ кратности $\leq n$

и $\operatorname{diam} U_i \leq w$.

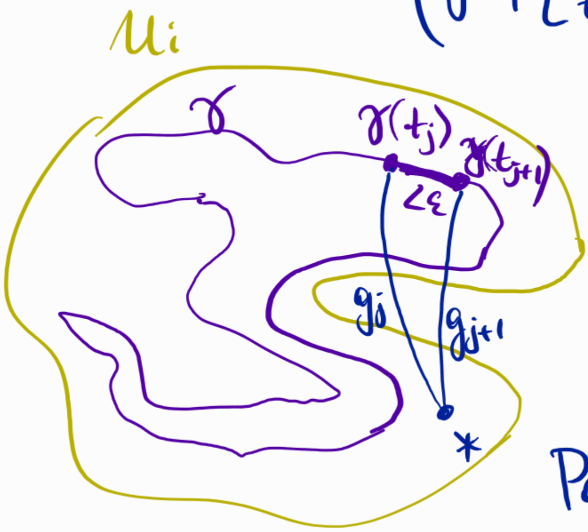
Проверим, что $\pi_1(U_i) \to \pi_1(M)$ тривиальны $\forall i$

Это будет противоречить тому, что M — n-существенное.

Пусть $\gamma : [0,1] \to U_i$ петля в U_i (без потери общности, γ кусочно гладкая)

Выберем $t_j \in [0,1]$, $t_0 = t_N = 0$ очень плотно, т.ч.

$$\mathrm{len}\left(\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}\right) < \varepsilon = \mathrm{sys}\, M - 2w$$



Т.к. $\mathrm{diam}\, U_i < w$, зафиксируем $* \in U_i$

В M можно провести кривые

g_j из $*$ в $\gamma(t_j)$ длины $< w$

Рассмотрим петли $\Delta_j = g_j \, \gamma|_{[t_j, t_{j+1}]} \, g_{j+1}$ в M

$$\mathrm{len}\, \Delta_j = \mathrm{len}\, g_j + \mathrm{len}\, g_{j+1} + \mathrm{len}\, \gamma|_{[t_j, t_{j+1}]} < 2w + \varepsilon = \mathrm{sys}\, M$$

Значит, Δ_j - стягиваемая петля в M

$\iota : U_i \hookrightarrow M$ включение $\qquad \iota_*([\gamma]) = \sum_j [\Delta_j] = 0 \in \pi_1(M)$

$\square$

Примеры существенных пространств: тор $T^n = (S^1)^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$

вещ. проективное пр-во $\mathbb{RP}^n = S^n /$ антипод. инволюция

Примеры несущественных пространств: $S^1 \times S^n$, $n \geq 2$