Теорема (Guth 2017) (была гипотезой Громова '83) $\exists c_n$ такая, что для любого компактного риманова многообразия M^n:

$$UW_{n-1} M \le c_n \sqrt[n]{vol_n M}$$

Следствие: для любой римановой метрики на n-существенном n-мерном (компактном) многообразии M выполнено

$$\mathrm{sys}\, M \le c_n \sqrt[n]{vol_n M}$$

ПРЕРЕКВИЗИТЫ

(Комбинаторный) Симплициальный комплекс K — непустой набор подмножеств конечного множества V ("вершины") со свойством

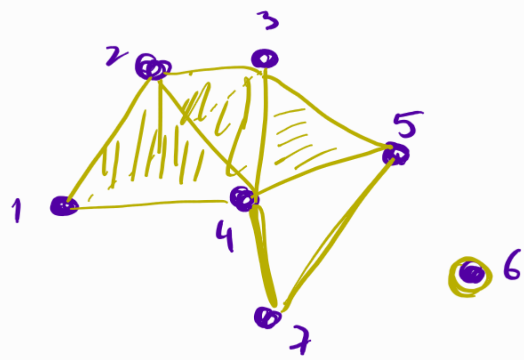
$$\left.\begin{array}{l} F_1 \subset F_2 \\ F_2 \in K \end{array}\right\} \Longrightarrow F_1 \in K$$

$F \in K$ — "грань" комплекса K "размерности" $\dim F = \#F - 1$

(Геометрический) Симплициальный комплекс — топологическое пространство, склеенное из симплексов типа

$$\Delta^d = \left\{ (x_0, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_0, \dots, x_d \ge 0 \\ \sum_i x_i = 1 \end{array} \right\}$$

согласно "чертежу" K (комб. симпл. комплекс): каждой грани $F \in K$ соответствует копия Δ^d, $d = \dim F$



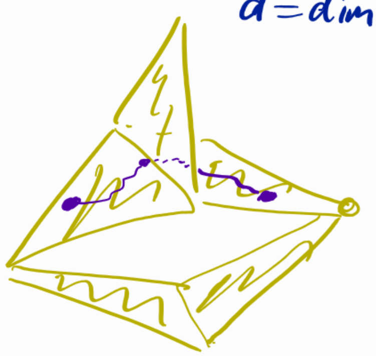
$\{1,2,3,4\} \in K$

$\{3,4,5\} \in K$

$\{4,7\} \in K$

$\{6\} \in K$

$\{5,7\} \in K$



Опр Риманов полиэдр размерности n — пространство, опред. след. набором данных

- геометрический симплициальный комплекс
- каждая грань содержится в n-мерной грани (pure)
- на каждой грани задана риманова метрика

- для любой пары пересекающихся граней их римановы метрики согласованы на пересечении (ограничения метрик на пересечение граней совпадают)

Замечания 1) Для связного риманова полиэдра $dist(p,q)$ определяется как инфимум длин кривых γ из p в q

Ограничение $\gamma|_{F^n}$ — распадается в объединение кус. гладких кривых на римановом многообразии F^n

$$len\,\gamma = \sum_{F^n} len\,\gamma|_{F^n}$$

2) Подполиэдр N — подмножество полиэдра M, которое само является полиэдром → симплиц. структура N подчинена симплиц. структуре M: любая грань $N \subset$ некот. грани M (гладко вложена) → риманова метрика на N получается ограничением метрики M

3) $\forall \delta$ любая 1-липшицева функция $f: M \to \mathbb{R}$ (риманов полиэдр) может быть приближена кусочно гладкой 1-липшицевой $f': M \to \mathbb{R}$ т.ч. $|f'(x) - f(x)| < \delta$

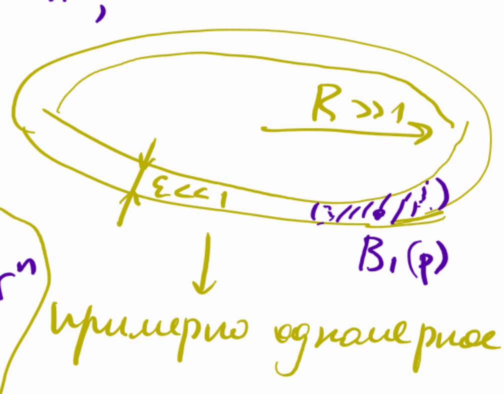
4) (теорема Сарда) Если $f: M^n \to \mathbb{R}$ кусочно гладкая, то для почти всех $a \in f(M) \subset \mathbb{R}$ $f^{-1}(a)$ — риманов подполиэдр размерности $n-1$

5) Из неравенства коплощади следует:

Если $f: M^n \to \mathbb{R}$ кусочно гладкая и 1-липшицева, то $\int_a^b vol_{n-1}(f^{-1}(t))\,dt \le vol_n f^{-1}([a,b])$

В частности, $\exists t \in [a,b]$ т.ч. $vol_{n-1}(f^{-1}(t)) \le \frac{vol_n(f^{-1}[a,b])}{b-a}$

Теорема (☆) $\exists \varepsilon_n$ т.ч. верно следующее: Пусть M^n — риманов полиэдр. Если $\forall p \in M$ $\mathrm{vol}_n B_1(p) \le \varepsilon_n$, то $UW_{n-1}(M) \le 2$



Эквивалентно,
$\exists \varepsilon_n$ т.ч. если $\exists r$ $\forall p \in M$ $\mathrm{vol}_n B_r(p) \le \varepsilon_n r^n$ то $UW_{n-1}(M) \le 2r$

Теорема(☆) влечёт теорему Гута

Если $\mathrm{vol}_n M = V$, перемасштабируем метрику (умножим её на маленькое число α)

$\alpha = \sqrt[n]{\frac{\varepsilon_n}{V}}$ так, что $\mathrm{vol}_n \alpha M = \alpha^n V = \varepsilon_n$

Тогда $\forall p \in \alpha M$ $\mathrm{vol}_n\left(B_1^{\alpha M}(p)\right) \le \mathrm{vol}_n \alpha M = \varepsilon_n$

$$\overset{(☆)}{\Longrightarrow} UW_{n-1}(M) = \frac{1}{\alpha} UW_{n-1}(\alpha M) \le \frac{1}{\alpha} \cdot 2 = \underbrace{\frac{2}{\sqrt[n]{\varepsilon_n}}}_{c_n} \cdot \sqrt[n]{\mathrm{vol}_n M}$$

Доказательство т-мы(☆) [Теорема о макроскопической скалярной кривизне]

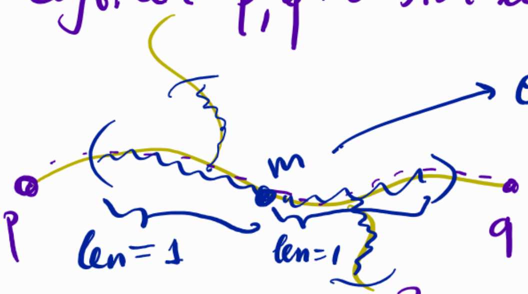
(Papasoglu '21) Индукция по n.

$\boxed{n=1}$ M — одномерный риманов полиэдр, т.е. граф с указанием длин рёбер.

Положим $\varepsilon_1 = 1$, и предположим что $\mathrm{vol}_1 B_1(p) \le 1$.

Тогда M распадается на компоненты связности диаметров < 2.

Действительно, если $\exists$ комп. связн. диаметра ≥ 2, то возьмём p, q в этой комп. связности т.ч. $\mathrm{dist}(p,q) \ge 2$



середина кратч. пути из p в q

$\mathrm{vol}_1 B_1(m) \ge 2$ противоречие

Значит, $UW_0(M) \le 2$

Индукционный переход $n-1 \to n$

Пусть M — n-мерный риманов полиэдр, $\forall p \ \mathrm{vol}_n B_1(p) \le \varepsilon_n$

(ε_n подберём позже)

вспомогательные определения

Назовём подполиэдр $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ **r-разделяющим**, если каждая связная компонента $C \subset M \setminus \Sigma$ может быть накрыта открытым шаром радиуса r в M

Пусть $V_r = \inf\{\mathrm{vol}_{n-1} \Sigma \mid \Sigma$ — r-разделяющий подполиэдр$\}$

Назовём r-разд. Σ **δ-минимальным**, если $\mathrm{vol}_{n-1} \Sigma < V_r + \delta$

Зафиксируем Σ — 1-разделяющее в M, δ-минимальное (δ подберём позже)

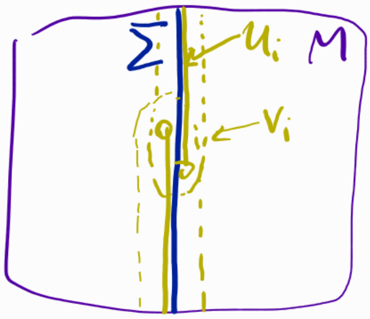
Т.к. внутренняя метрика Σ доминирует внешнюю; по лемме 1

$$\forall p \in \Sigma \quad \mathrm{vol}_{n-1} B^{\Sigma}_{\frac{1}{2}}(p) \le \mathrm{vol}_{n-1}\left(\Sigma \cap B^{M}_{\frac{1}{2}}(p)\right) \le \varepsilon_{n-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Тогда по предположению индукции $UW_{n-2}(\Sigma) \le 1$

Тогда $\exists$ открытое в Σ покрытие $\Sigma = \bigcup_i U_i$ кратности $\le n-1$, $\mathrm{diam}_\Sigma U_i \le 1$

по лемме 2 можно слегка модифицировать U_i внутри M так, что получится открытое в M покрытие $\Sigma \subset \bigcup_i V_i$ кратности $\le n-1$, $\mathrm{diam}_M V_i \le 2$

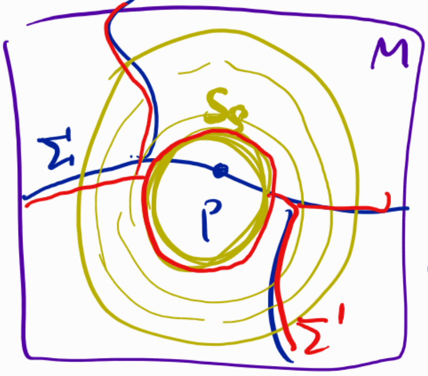


Добавим к V_i компоненты связности $M \setminus \Sigma$ (они имеют диаметры ≤ 2) и получим открытое покрытие M кратности $\le n$, диаметры множеств ≤ 2

Значит $UW_{n-1}(M) \le 2$ $\square$

Лемма 1 $\forall \varepsilon_{n-1} \ \exists \varepsilon_n \ \exists \delta$ такие, что $\forall$ δ-минимального 1-разделяющего полиэдра $\Sigma \subset M$ выполнено:

$$\forall p \in M \ \mathrm{vol}_n B_1(p) \le \varepsilon_n \implies \forall p \in \Sigma \ \mathrm{vol}_{n-1}\left(\Sigma \cap B_{\frac{1}{2}}(p)\right) \le \varepsilon_{n-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}$$



Д-во. Фиксируем $p\in\Sigma$, где нарушается

Так как $vol_n B_1(p) \le \varepsilon_n$, то из [Сард+коплощадь] следует, что $\exists \rho\in[\frac12,1]$:

$$vol_{n-1} S_\rho(p) \le 2\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2}\left(\frac12\right)^{n-1}$$

Положим

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2^{n+1}}$$

$$\delta = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2}\left(\frac12\right)^{n-1}$$

метрическая сфера

$$S_\rho(p) = \{x\in M \mid dist_M(x,p)=\rho\}$$

Заменим Σ на $\Sigma' = (\Sigma\setminus B_\rho)\cup S_\rho$

Наблюдение: 1) Σ' — 1-разделяющее

2) $vol_{n-1}\Sigma' \le vol_{n-1}\Sigma - vol_{n-1}(\Sigma\cap B_\rho) + vol_{n-1} S_\rho <$

$$< \underset{\substack{\uparrow \\ \text{inf объёмов} \\ \text{1-разд. полиэдров}}}{V} + \delta - \varepsilon_{n-1}\left(\frac12\right)^{n-1} + \frac{\varepsilon_{n-1}}{2}\left(\frac12\right)^{n-1} = V$$

противоречие $\square$

$\boxed{\text{Лемма 2}}$ $\underset{\text{замкнутое}}{\Sigma\subset M}$, $\Sigma = \bigcup_i U_i$ ← открытые в Σ кратности $\le n-1$, и диаметры $U_i \le 1$

Тогда $\exists$ открытые в M множества V_i

$\Sigma\subset\bigcup_i V_i$ кратности $\le n-1$
диаметры $V_i \le 2$

Д-во Первый шаг: сдуваем U_i до замкнутых множеств C_i

$$C_i = \{x\in\Sigma \mid B_\varepsilon(x)\cap\Sigma\subset U_i\}\subset U_i$$

где $\varepsilon = \min\limits_{x\in\Sigma}\underbrace{\max_i dist(x,\Sigma\setminus U_i)}_{>0}$ $\underline{\text{Так что } \Sigma = \bigcup_i C_i}$ >0

Второй шаг: Раздуть C_i внутри M до V_i = δ-окрестн. C_i в M

Без увеличения кратности

$$\delta < \min_{x \in M} \max\left(\operatorname{dist}(x, C_{i_1}), \dots, \operatorname{dist}(x, C_{i_n})\right)$$

$$\forall i_1 < \dots < i_n \qquad \square$$